1. Université de Tlemcen, Département de Mahématiques, Module:Transformations Intégrales, Examen de Rattrapage Juin 2023

Exercice1.(07 pts)

Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{(E)}$$

avec les conditions au bord

$$y(0,t) = 0, \qquad t > 0$$
$$y(l,t) = a, \qquad t > 0$$

et les conditions initiales

$$y(x,0) = 0, \qquad 0 < x < l$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad 0 < x < l.$$

Résoudre (E) en utilisant la transformée de Laplace.
Solution:

Appliquons la transformée de Laplace à (E) nous obtenons

$$\frac{d^2 Y(x,s)}{dx^2} - s^2 Y(x,s) = 0 \qquad (\mathbf{01pt})$$

La solution est donnée par

$$Y(x,s) = c_1 \cosh sx + c_2 \sinh sx \qquad (\mathbf{1p})$$

(remarquons que nous pouvons écrire la solution avec e^{sx})

La condition au limite en en $x = 0$ donne $Y(0,s) = c_1 = 0$ et $Y(x,s) = c_2 \sinh sx$.La condition en $x = l$ donne

$$Y(l,s) = \frac{a}{s} = c_2 \sinh sl$$

et

$$c_2 = \frac{a}{s \sinh sl}$$

ainsi

$$Y(x,s) = \frac{a \sinh sx}{s \sinh sl} \quad (\mathbf{1pts})$$

qui admet les pôles simples suivants

$$s_n = \frac{n\pi i}{l} \text{ pour n=0,} \pm 1, \pm 2, ...(\mathbf{1pt})$$

pour calculer la transformation inverse, on doit calculer les résidus:

$$\operatorname{Re} s(0) = \lim{}_{s\to 0} s e^{rs} \frac{a \sinh sx}{s \sinh sl} = \frac{ax}{l} \qquad (\mathbf{1pt})$$

d'une manière similaire

$$\operatorname{Re} s(\frac{n\pi i}{l}) = \frac{a}{n\pi} (-1)^n e^{\frac{n\pi i t}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (\mathbf{1pt})$$

Finalement , la solution est

$$y(x,t) = \sum \operatorname{Re} s = \frac{ax}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi t}{l} \quad (\mathbf{1pt})$$

Exercice2:06 pts

Résoudre

$$y'' - 10y' + 9y = 5t, \qquad y(0) = -1, \; y\prime(0) = 2$$

Solution:
la transformée de Laplace $Y(s)$ vérifie

$$\left(s^2 - 10s + 9\right) Y(s) + s - 12 = \frac{5}{s^2} \qquad 01 \text{ pts}$$

ceci donne

$$Y(s) = \frac{5 + 12s^2 - s^3}{s^2 (s-9)(s-1)} \quad 01 \text{ pt}$$

la décomposition en fraction rationnelle donne

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s-9)} + \frac{D}{(s-1)} \qquad 01\text{pts}$$

un calcul simple donne

$$Y(s) = \frac{50/81}{s} + \frac{5/9}{s^2} + \frac{31/81}{(s-9)} + \frac{50/81}{(s-1)} \quad 02 \text{ pts}$$

ainsi

$$y(t) = \frac{50}{81} + \frac{5}{9}t + \frac{31}{81}e^{9t} - 2e^t \qquad 01 \text{ pts}$$

Exercice 3 06 pts.

Résoudre par la transformée de Fourier

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in R, \;\; t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \qquad\quad x \in R \end{aligned}$$

où c est une constante réelle, et $f \in L^1(R)$.

Sol: voir le cours