Université Abou berkBelkaid Tlemcen (2022/2023)
Faculté des sciences
Département de mathématiques (L3)
Examen de rattrapage: Introduction aux processus aléatoires (1h30mn)
14/06/2023

EXERCICE N°1 (10 pts)

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r définies sur l'espace de probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i.i.d de meme loi μ. On pose $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$

   a). On suppose que μ.est la loi uniforme sur [0;1], donner sa densité et sa fonction de répartition (1pt)

   b). Monter que la suite $(n\,(1 - Y_n))_{n\geq 1}$converge en loi vers une limite qu'on explicitera.[$indication$: $\underset{n\to+\infty}{lim}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$] $(3pts)$

2. Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme sur [-1;1] et soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r, i.i.d, avec

$$P(Z_n = \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}; \quad P(Z_n = -\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}$$

   et $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Z_n$ $\quad$ [$indication : e^{it} = \cos t + i \sin t$]

   a). Donner la fonction caractéristique de la v.a. Y (1pt)

   b). Déterminer la fonction caractéristique de $(Z_n)_{n\geq 1}$, en déduire celle de S_n $(2.5pts)$

   c). En utilisant la formule $\sin(\frac{t}{2^{n-1}}) = 2\sin(\frac{t}{2^n})\cos(\frac{t}{2^n})$ vérifier que

$$\Phi_{S_n}(t) = \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t/2^n}{\sin(t/2^n)} \qquad (1.5\text{pts})$$

   d). En déduire que S_n converge en loi vers une variable que l'on déterminera (1pt)

EXERCICE N°2 (10 pts)

1. On considère pour $\alpha > 0$ la fonction de répartition continue suivante:

$$F(x) = P_\alpha(X \leq x) = \left(1 - x^{-\alpha}\right) \cdot 1_{[1;+\infty[}(x)$$

   On observe $(X_1, ..., X_n)$ suite de v.a.$i.i.d$ de loi P_α

Calculez l'estimateur du maximum de vraisemblance de α.$(3pts)$

2. Si $\widehat{\alpha}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de α et si sa variance tend vers zéro,alors il est convergent (en quels sens?). (3pts)

3. Si $\widehat{\alpha}$ est un estimateur de α convergent en moyenne quadratique, alors il est asymptotiquement sans biais.(2pts)

4. Définir le processus de Poisson (2pts)

SOLUTION PROPOSEE

EXERCICE N°1 (10 pts)

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r définies sur l'espace de probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i.i.d de meme loi μ. On pose $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$

   a). On suppose que μ.est la loi uniforme sur [0;1], donner sa densité et sa fonction de répartition (1pt)
   Donc $X_n \hookrightarrow U_{[0;1]}$ sa densité est: $f_{X_n}(x) = 1 \times 1_{[0;1]}(x)$ et sa fonction de répartion est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

   b). Monter que la suite $(n\,(1-Y_n))_{n\geq 1}$converge en loi vers une limite qu'on explicitera.$[indication: \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}]$ $(3pts)$
   Déterminons la loi de $(n\,(1-Y_n))_{n\geq 1}$ ie sa fonction de répartition mais avant calculons la loi de Y_n

$$\begin{aligned} Y_n &\in [0;1] \qquad P(Y_n \leq y) = P(X_1 \leq y, ..., X_n \leq y) \\ P(Y_n &\leq y) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq y) \\ P(Y_n &\leq y) = y^n \quad (*) \end{aligned}$$

   donc

$$\begin{aligned} n\,(1-Y_n) &\in [0;n] \qquad P(n\,(1-Y_n) \leq t) = P(Y_n \geq 1 - \frac{t}{n}) \\ P(n\,(1-Y_n) &\leq t) = 1 - P(Y_n \leq 1 - \frac{t}{n}) \\ &= 1 - \left[1 - \frac{t}{n}\right]^n \qquad selon(*) \end{aligned}$$

   la convergence devient evidente, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}, donc$

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = 1 - e^{-t}$$

   Or $1 - e^{-t}$ est la fonction de répartition de la loi exponetielle de paramétre 1

   $(n\,(1-Y_n))_{n\geq 1}$ *converge en loi vers une variable* exponetielle de paramétre 1

2. Soit Y une variable aléatoire de loi uniforme sur [-1;1] et soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r, i.i.d, avec

$$P(Z_n = \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}; \qquad P(Z_n = -\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}$$

   et $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_n$ $\quad [indication: e^{it} = \cos t + i \sin t]$

   a). Donner la fonction caractéristique de la v.a. Y (1pt)

$$\begin{aligned} \Phi_Y(t) &= E(e^{ity}) = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} e^{ity} dy \\ &= \left[\frac{1}{2it} e^{ity}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} \\ &= \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

b). Déterminer la fonction caractéristique de $(Z_n)_{n\geq 1}$, en déduire celle de S_n $(2.5pts)$

$$\begin{aligned}\Phi_{Z_n}(t) &= E(e^{itZ_n}) = e^{it\frac{1}{2^n}}P(Z_n = \frac{1}{2^n}) + e^{-it\frac{1}{2^n}}P(Z_n = -\frac{1}{2^n}) \\ &= \frac{e^{it\frac{1}{2^n}} + e^{-it\frac{1}{2^n}}}{2} = \cos(\frac{t}{2^n})\end{aligned}$$

Donc

$$\Phi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{Z_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{t}{2^k})$$

c). En utilisant la formule $\sin(\frac{t}{2^{n-1}}) = 2\sin(\frac{t}{2^n})\cos(\frac{t}{2^n})$ vérifier que

$$\Phi_{S_n}(t) = \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t/2^n}{\sin(t/2^n)} \qquad (1.5\text{pts})$$

En effet, il suffit de remarquer que

$$\sin(\frac{t}{2^{n-1}}) = 2\sin(\frac{t}{2^n})\cos(\frac{t}{2^n}) \Longleftrightarrow \cos(\frac{t}{2^n}) = \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{t}{2^{n-1}})}{\sin(\frac{t}{2^n})}$$

donc

$$\begin{aligned}\Phi_{S_n}(t) &= \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{t}{2^k}) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{t}{2^{k-1}})}{\sin(\frac{t}{2^k})} \\ &= \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(\frac{t}{2^{k-1}})}{\sin(\frac{t}{2^k})} \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{\sin t}{\sin(t/2)} \times \frac{\sin(t/2)}{\sin(1/2^2)} \times ... \times \frac{\sin(\frac{t}{2^{n-1}})}{\sin(\frac{t}{2^n})} \\ &= \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t/2^n}{\sin(t/2^n)} \quad CQFD\end{aligned}$$

d). En déduire que S_n converge en loi vers une variable que l'on déterminera (1pt)

$$\lim_{n\to+\infty} \Phi_{S_n}(t) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t/2^n}{\sin(t/2^n)} = \frac{\sin t}{t} = \Phi_Y(t)$$

car $\lim_{n\to+\infty} \frac{t/2^n}{\sin(t/2^n)} = 1$ conclusion

S_n connverge en loi vers Y la loi uniforme sur $[-1;1]$

EXERCICE N∘2 (10 pts)

1. On considère pour $\alpha > 0$ la fonction de répartition continue suivante:

$$F(x) = P_\alpha(X \le x) = \left(1 - x^{-\alpha}\right) \cdot 1_{[1;+\infty[}(x)$$

On observe $(X_1, ..., X_n)$ suite de v.a.$i.i.d$ de loi P_α

Calculez l'estimateur du maximum de vraisemblance de α.(3pts)

a) Déterminons la densité

$$f(x) = \alpha \cdot x^{-\alpha-1}$$

b) la vraisemblance

$$\begin{aligned} L(x,\alpha) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\alpha) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \alpha \cdot x_i^{-\alpha-1} \\ &= \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\alpha+1)} \end{aligned}$$

c) log-vraisemblance

$$\ln L(x,\alpha) = n \ln \alpha - (\alpha+1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

d) la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \ln L(x,\alpha) = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \ln L(x,\alpha) = 0 \Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$

vérification que c'est un maximum

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \ln L(x,\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} < 0 \qquad CQFD$$

2. Si $\widehat{\alpha}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de α et si sa variance tend vers zéro,alors il est convergent (en quels sens?). (3pts) (voir cours)

3. Si $\widehat{\alpha}$ est un estimateur de α convergent en moyenne quadratique, alors il est asymptotiquement sans biais.(2pts) (voir cours)

4. Définir le processus de Poisson (2pts) (voir cours)