Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

3ème année Licence Mathématiques
Semestre 6

Examen de rattrapage de Géométrie Différentielle
18 Juin 2023
Durée 1h 30mn

Exercice 1 (6 pts)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle qu'il existe une constante k, $0 < k < 1$, vérifiant $|f'(t)| \leq k$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\langle dF(x, y)(h), h\rangle \geq c \|h\|^2$$

pour tout $(x, y), h \in \mathbb{R}^2$, où $\langle ., .\rangle$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$ et $\|.\|$ la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (7 pts)

Soient R et r deux réels strictement positifs. On considère le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } x^2 + z^2 = r^2\right\}$$

1. Pour quelle condition sur R et r, l'ensemble V est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?
2. Déterminer l'espace tangent à V au point $(0, R, r)$.

Exercice 3 (7 pts)

Soit le tore de dimension deux : $T^2 = S^1 \times S^1$ (S^1 le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$).

1. Montrer que T^2 est une sous variété de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$g(\theta, \phi) = ((2 + \cos(\theta)) \cos(\phi), (2 + \cos(\theta)) \sin(\phi), \sin(\theta))$$

et considérons l'ensemble

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = 1\right\}$$

Vérifier que $M = g(\mathbb{R}^2)$ et montrer que M est une sous variété de $\mathbb{R}^3$.

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

$3^{ème}$ année Licence Mathématiques
Semestre 6

Corrigé de l'Examen de Rattrapage de Géométrie Différentielle
18 Juin 2023

Exercice 1 (6 pts)

On a : $F(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$ où f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. **(0.5pt)**

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & f'(x) \\ f'(y) & 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1pt)}$$

Donc, pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$dF(x,y)(h_1,h_2) = (h_1 + h_2 f'(x), h_1 f'(y) + h_2) \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

On en déduit que

$$S = \langle dF(x,y)(h_1,h_2),(h_1,h_2)\rangle = h_1^2 + h_2^2 + h_1 h_2 (f'(x) + f'(y)) \qquad \textbf{(1pt)}$$

or : $|f'(t)| \leq k$. D'où

$$S \geq (1-k)(h_1^2 + h_2^2) + k(h_1 - h_2)^2 \qquad \textbf{(1.5pt)}$$

Et comme : $k(h_1 - h_2)^2 \geq 0$ **(0.5pt)**. Alors

$$S \geq (1-k)(h_1^2 + h_2^2) \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

Ainsi, il existe une constante $c = 1 - k > 0$ telle que

$$\langle dF(x,y)(h), h\rangle \geq c\,\|h\|^2 \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

Exercice 2 (7 pts)

Soient r et R deux réels strictement positifs. On considère

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } x^2 + z^2 = r^2\right\}$$

1. La condition sur R et r :
   Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \quad \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z)) &\to f(x,y,z) = (x^2 + y^2 - R^2, x^2 + z^2 - r^2) \end{aligned} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

   f est de classe C^∞, et on a : $V = f^{-1}\{(0,0)\}$. La matrice jacobienne est

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

   Vérifions que f est une submersion, soit donc le système suivant

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x^2 + z^2 = r^2 \\ xy = 0 \\ xz = 0 \\ yz = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1pt)}$$

On a donc $x = y = 0$ ou $x = z = 0$ ou $y = z = 0$ **(0.5pt)**, mais les points $(0,0,z)$ et $(0,y,0)$ n'appartiennent pas à V **(0.5pt)**. Donc pour $(x,y,z) \in V$, $df(x,y,z)$ n'est pas surjective si et seulement si $x^2 = R^2$ et $x^2 = r^2$. **(1pt)**
Finalement, V est une sous-variété de R^2 de dimension 1 si et seulement si $R \neq r$. **(1pt)**

2. L'espace tangent à V au point $(0,R,r)$ est donné par

$$\begin{aligned} T_{(0,R,r)}V &= \ker(df(0,R,r)) && \textbf{(0.5pt)} \\ &= \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / b = c = 0\right\} && \textbf{(0.5pt)} \\ &= Vect\left\{(1,0,0)\right\} && \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

Exercice 3 (7 pts)

Soit le tore de dimension deux : $T^2 = S^1 \times S^1$ (S^1 le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$).

1. Montrons que T^2 est une sous variété de $\mathbb{R}^4$.
   Rappel : Si M_1 est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p_1 et M_2 une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension p_2, alors $M_1 \times M_2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ de dimension $p_1 + p_2$. **(0.5pt)**
   Il suffit donc de vérifier que S^1 est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, pour cela il suffit de vérifier que la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ est une submersion en tout point de S^1 (un travail déjà fait en cours). **(1pt)**
   Donc $T^2 = S^1 \times S^1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2. **(0.5pt)**
2. Soit l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$g(\theta,\phi) = ((2+\cos(\theta))\cos(\phi), (2+\cos(\theta))\sin(\phi), \sin(\theta))$$

et considérons l'ensemble

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = 1\right\}$$

(a) Vérifions que $M = g(\mathbb{R}^2)$.
l'image $g(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble

$$g(\mathbb{R}^2) = \left\{g(\theta,\phi) = ((2+\cos(\theta))\cos(\phi), (2+\cos(\theta))\sin(\phi), \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^3, (\theta,\phi) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On pose $x = (2+\cos(\theta))\cos(\phi)$, $y = (2+\cos(\theta))\sin(\phi)$, et $z = \sin(\theta)$ **(0.5pt)**
Alors, on observe que :

$$x^2 + y^2 = (2+\cos(\theta))^2 \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

et donc

$$\sqrt{x^2+y^2} = |2+\cos(\theta)| = 2+\cos(\theta) \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

Si bien que l'équation

$$\left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

Donc $(x,y,z) \in M$ et par suite : $g(\mathbb{R}^2) = M$.

(b) Montrons que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
On considère

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \quad \mathbb{R} \\ (x,y,z)) &\to f(x,y,z) = \left(2 - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 - 1 \end{aligned} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

f est de classe C^∞, et on a : $f^{-1}\{0\} = M$. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la matrice jacobienne est

$$J_f(x,y,z) = \left(2x - \frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2y - \frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 2z\right) \qquad \textbf{(1pt)}$$

Donc : $J_f(x,y,z) = 0$ si et seulement si $x = y = z = 0$ ou $(z = 0$ et $\sqrt{x^2+y^2} = 2)$. Mais aucun de ces point n'appartient à M. **(1pt)**

Donc, $\forall (x,y,z) \in M$, df est surjective, ainsi M est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. **(0.5pt)**