Université de Tlemcen
Département de Mathématiques
Module: Transformations Intégrales
AU: 2022-2023

Examen final, Mai 2023, Durée 1h 30.

**Exercice 1:** Soit la fonction

$$f(x) = e^{-a|x|}, \ \ a > 0$$

1) Calculer $\widehat{f}$.
Sol:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t} f(t)dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt \\ &= \frac{1}{a+i\omega} + \frac{1}{a-i\omega}\end{aligned}$$

2) En déduire la transformée de Fourier de $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Sol: pour$a = 1$ on a $\widehat{f}(\omega) = 2g(\omega)$ ainsi

$$F\left(\widehat{f}(\omega)\right) = 2\widehat{g}(\omega) = 2\pi f(-\omega)$$

3) Calculer $f * f$. En déduire la transformée de Fourier de $h(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.
Sol: On a

$$f * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(|x-y|+|y|)} dy$$

ainsi si $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}f * f(x) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(x-2y)} dy + \int_{0}^{x} e^{-ax} dy + \int_{x}^{+\infty} e^{-a(2y-x)} dy \\ &= e^{-ax}\left(x + \frac{1}{a}\right)\end{aligned}$$

par parité , on aura

$$f * f(x) = e^{-a|x|}\left(|x| + \frac{1}{a}\right)$$

On a

$$F(f * f(x)) = f^2(\omega) = \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}$$

en particulier pour $a = 1$ , nous obtenons

$$F\left(f * f\left(x\right)\right)\left(\omega\right) = \frac{4}{\left(1+\omega^2\right)^2} = 4h(\omega)$$
$$= \left(f * f\left(-\omega\right)\right)$$

ceci donne

$$F^2\left(f * f\left(x\right)\right)\left(\omega\right) = 4F(h(\omega)) = \left(f * f\left(-\omega\right)\right)$$

ceci donne

$$F(h(\omega)) = \frac{\pi}{2}e^{-a|\omega|}\left(|\omega| + \frac{1}{a}\right)$$

4) Déterminer la transformée de Fourier de $\frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Sol: on remarque que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1+x^2)}\right) = \frac{d}{dx}\left(g(x)\right) =$$
$$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

ceci montre que

$$h(x) = \frac{-1}{2}g'(x)$$

et

$$F\left(h\right)\left(\omega\right) = -\frac{\pi}{4}\omega e^{-|\omega|}$$

**Exercice 2:**

Soit $P : L^2 \rightarrow lL^2$ La transformation de Fourier Plancherel. Montrer que pour tout $f \in L^2$

$$P^4 f = f$$

Sol: Il suffit de remarquer que

$$Pf = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}Ff$$

Ainsi

$$P^2 f\left(x\right) = \frac{1}{2\pi}F^2 f\left(x\right) = f(-x)$$

ce qui donne que

$$P^4 f\left(x\right) = P^2\left(P^2 f\left(x\right)\right) =$$
$$P^2\left(f(-x)\right) = f(x)$$

**N.B Chaque question est notée sur 4 pts**