Université Abou berkBelkaid Tlemcen (2022/2023)
Faculté des sciences
Département de mathématiques (L3)
Examen du module introduction aux processus aléatoires (1h30mn)
21/05/2023

EXERCICE N°1 (6 pts)

1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \geq \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \qquad ((2pts))$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires: X suit une loi exponetielle de paramétre $\alpha;\ \alpha > 0$ et Y suit une loi géométrique de paramétre $p,\ p \in .]0;1[$ Donner les fonctions caractéristiques de X et Y. (2pts)

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n est une variable aléatoire de loi géométrique de paramétre $\alpha/n;\ où\ \alpha > 0$. On pose $X_n = \frac{Y_n}{n}$, Montrez que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X, v.a de loi exponetielle de paramétre α (2pts)

   (Indication: $\mathrm{e}^x = 1 + x + x\varepsilon(x);\ \varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$)

EXERCICE N°2 (6 pts)

Soit $B = (B_t, t > 0)$ un mouvement Brownien standard à valeurs réelles et définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \digamma, P)$

1. Rappeler la définition du mouvement Brownien standard $B = (B_t, t > 0)$ à valeurs réelles (1pt)

2. Montrez que $B_t + B_s \hookrightarrow \mathcal{N}(0, t + 3s)\ \ pour\ tout\ t > s > 0 \quad (2pts)$

3. Soit Y une v.a qui suit une loi gaussienne centrée réduite, On pose: $X_t = \sqrt{t}Y$ pour tout $t > 0$. Montrer que le processus (X_t) n'est pas un mouvement Brownien (1pt)

4. Montrez que $B_t^{'} = (tB_{\frac{1}{t}}, t > 0,\ avec\ B_0^{'} = 0)$ est un mouvement Brownien standard (2pts)

EXERCICE N°3 (8 pts)

Soient $X_1, X_2, ..., X_n, n$ observations d'un caractère pouvant être modélisé par une loi exponetielle de paramétre $1/\lambda$ avec $\lambda > 0,\ \lambda$ etant inconnu

$$f(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda}\exp(-\frac{1}{\lambda}x) \cdot 1_{[0,+\infty[}(x)$$

1. Donner l'emv (l'estimateur du maximum de vraisemblance: noté: $\widehat{\lambda}$) du paramétre λ, est-il bien défini?

2. Calculer $E(\widehat{\lambda}),\ Var(\widehat{\lambda})$, ainsi que l'erreur moyenne quadratique.Vérifier que $\widehat{\lambda}$ est fortement consistant

3. Calculer son information de Fisher, $I_n(\widehat{\lambda})$, en déduire s'il est éfficace.

4. On suppose désormais que n = 1000 (soit "assez grand") et que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 3500$

   a) Proposer un intervalle de confiance IC pour λ avec un niveau de confiance de 95%

   b) Montrez que $P(\lambda \in IC) = P(\lambda \in [\widehat{\lambda} - t_\alpha \frac{1}{\sqrt{I_n(\widehat{\lambda})}};\ \widehat{\lambda} + t_\alpha \frac{1}{\sqrt{I_n(\widehat{\lambda})}}\ ])$

"Étudier sans réfléchir est une occupation vaine ; réfléchir sans étudier est dangereux"

SOLUTION PROPOSEE

EXERCICE N°1 (6 pts)

1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que pour tout $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \geq \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \qquad ((2\text{pts}))$$

Ou bien montrons que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt \geq \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$$

Il suffit de remarquer que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt = F(x)$ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite *N(0,1)*.

Supposons que X suit une loi normale centrée réduite *N(0,1)*, X admet bien une espérance (qui est nulle) et une variance (égale à 1), donc en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous obtenons que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Fixons-nous un x > 0. Alors, en appliquant l'inégalité précédente, pour ε = x, sachant que E[X] = 0 et V[X] = 1 :

$$P(|X| \geq x) \leq \frac{1}{x^2}$$

d'un autre coté

$$\begin{aligned} P(|X| &\geq x) = 1 - P(|X| < x) \\ &= 1 - [F(x) - F(-x)] \\ &= 1 - F(x) + F(-x) \\ &= 1 - F(x) + 1 - F(x) \\ &= 2 - 2F(x) \\ &= 2\,[1 - F(x)] \end{aligned}$$

Conclusion

$$2\,[1 - F(x)] \leq \frac{1}{x^2} \Longleftrightarrow F(x) \geq 1 - \frac{1}{2x^2} \qquad CQFD$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires: X suit une loi exponetielle de paramétre α; $\alpha > 0$ et Y suit une loi géométrique de paramétre p. Donner les fonctions caractéristiques de X et Y. (2pts)

on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha \exp(-\alpha x) \cdot 1_{[0,+\infty[}(x) \Longrightarrow E(e^{itx}) = \int_0^{+\infty} \alpha \exp(-\alpha x + itx)\ dx \\ &\Longrightarrow \Phi_X(t) = \left[-\frac{\alpha}{\alpha - it}\exp -(\alpha - it)x\right]_0^{+\infty} \\ &\Longrightarrow \Phi_X(t) = \left[0 + \frac{\alpha}{\alpha - it}\right] \\ &\Longrightarrow \Phi_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - it} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(Y &= k) = p(1-p)^{k-1}, \ \ \forall k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow E(e^{itx}) = \sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1} e^{itk} \\
&\Longrightarrow \ \Phi_Y(t) = pe^{it} \sum_{k\geq 1} \left[(1-p)\, e^{it}\right]^{k-1} \\
&\Longrightarrow \ \Phi_Y(t) = pe^{it} \sum_{k\geq 0} \left[(1-p)\, e^{it}\right]^{k} \\
&\Longrightarrow \ \Phi_Y(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)\, e^{it}} = \frac{p}{e^{-it}-1+p}
\end{aligned}
$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n est une variable aléatoire de loi géométrique de paramétre α/n; *où* $\alpha > 0$. On pose $X_n = \frac{Y_n}{n}$, Montrez que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X, v.a de loi exponetielle de paramétre α (2pts)

   On a pour tout t$\in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\Phi_{X_n}(t) &= E(e^{it\frac{Y_n}{n}}) = \Phi_{Y_n}(t/n) \\
&\overset{p=\frac{\alpha}{n}}{=} \frac{\alpha/n}{\exp(-i\frac{t}{n})-1+\frac{\alpha}{n}} \\
&= \frac{\alpha/n}{-i\frac{t}{n}-i\frac{t}{n}\epsilon\left(-i\frac{t}{n}\right)+\frac{\alpha}{n}} \quad [ind] \\
&= \frac{\alpha}{-it+\alpha-it\epsilon\left(-i\frac{t}{n}\right)}
\end{aligned}
$$

   puis par passage a la limite on aura

$$
\forall t \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to+\infty} \Phi_{X_n}(t) = \frac{\alpha}{\alpha-it}
$$

   qui est la fonction caractéristique de la loi exponetielle de paramétre α,D'où la convergence en Loi

<u>EXERCICE N◦2</u> (6 pts)

Soit $B = (B_t, t > 0)$ un mouvement Brownien standard à valeurs réelles et définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

1. $B = (B_t, t > 0)$ est un mouvement Brownien standard $B = (B_t, t > 0)$ à valeurs réelles , s'il verifie les conditions suivantes:

$$
\begin{gathered}
\bullet\ B_0 = 0 \ \ p.s \\
\bullet\ \textit{Les trajectoires qui } t \longmapsto B_t \textit{ sont continues p.s} \\
\bullet\ \textit{Les accroissements sont indépendants ie } \forall k \in \mathbb{N}^* \ \forall\ t_1 < t_2 < ... < t_k \\
\textit{les v.a(s) } B_{t_2} - B_{t_1}; ....; B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \textit{sont indépendantes} \\
\bullet \forall 0 \leq s < t \ \ \textit{la v.a } B_t - B_s = B_{t-s} \hookrightarrow N(0; t-s)
\end{gathered}
$$

2. Montrez que $B_t + B_s \hookrightarrow \mathcal{N}(0, t+3s)$ *pour tout* $t > s > 0$ (2*pts*)

   $B_t + B_s$ est une gausienne car c'est une combinaison linéaire de gausiennes

$$
\begin{aligned}
E(B_t + B_s) &= E(B_t) + E(B_s) \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(B_t + B_s) &= V(B_t - B_s + 2B_t) \\
&= V(B_t - B_s) + V(2B_s) \ \textit{car Les accroissements sont indépendants} \\
&= t - s + 4V(B_s) \\
&= t - s + 4s = t + 3s
\end{aligned}
$$

3. Soit Y une v.a qui suit une loi gaussienne centrée réduite, On pose: $X_t = \sqrt{t}Y$ pour tout $t > 0$. Montrer que le processus (X_t) n'est pas un mouvement Brownien (1pt)

$$Y \hookrightarrow N(0;1) \Longrightarrow E(Y) = 0 \; et \; V(Y) = 1$$

On a : $\begin{array}{l} \bullet\; X_t = \sqrt{t}Y \Longrightarrow X_0 = \sqrt{0}Y = 0 \\ \bullet\; Les\ trajectoires\ qui\ t \longmapsto X_t\ sont\ continues\ p.s \end{array}$

$$\begin{aligned} X_t - X_s &= \sqrt{t}Y - \sqrt{s}Y = \left(\sqrt{t} - \sqrt{s}\right) Y \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} E(X_t - X_s) = \left(\sqrt{t} - \sqrt{s}\right) E(Y) = 0 \\ V(X_t - X_s) = \left(\sqrt{t} - \sqrt{s}\right)^2 V(Y) = t + s - 2\sqrt{ts} \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$X_{t-s} = \sqrt{t-s}Y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} E(X_{t-s}) = \sqrt{t-s}E(Y) = 0 \\ V(X_{t-s}) = \left(\sqrt{t-s}\right)^2 V(Y) = t - s \end{array} \right.$$

On remarque que

$$X_{t-s} \neq X_t - X_s$$

donc ce n'est pas un mouvement Brownien

4. Montrez que $B_t^{'} = (tB_{\frac{1}{t}}, t > 0,\ avec\ B_0^{'} = 0)$ est un mouvement Brownien standard (2pts)

On a la propriète

$$B = (B_t, t > 0) est\ un\ mouvement\ Brownien \Longleftrightarrow cov(B_t^{'}, B_s^{'}) = s \wedge t$$

donc

$$\begin{aligned} cov(B_t^{'}, B_s^{'}) &= cov(tB_{\frac{1}{t}}, sB_{\frac{1}{s}}) \\ &= ts\ cov(B_{\frac{1}{t}}, B_{\frac{1}{s}}) \\ &= ts\ \left(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}\right) \\ &= s \wedge t \end{aligned}$$

en effet

$$\left\{ \begin{array}{l} s < t \Longrightarrow ts\ \left(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}\right) = ts\frac{1}{t} = s \\ s > t \Longrightarrow ts\ \left(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}\right) = ts\frac{1}{s} = t \end{array} \right.$$

EXERCICE N◦3 (8 pts)

Soient $x_1, x_2, ..., x_n, n$ observations d'un caractère pouvant être modélisé par une loi exponetielle de paramétre $1/\lambda$ avec $\lambda > 0$, λ etant inconnu

$$f(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp(-\frac{1}{\lambda}x) \cdot 1_{[0,+\infty[}(x)$$

1. Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ une vecteur de v.a.i.i.d

la vraisemblance:

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \\ &= \frac{1}{\lambda^n}\ \exp -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

log-vraisemblance

$$\ln L(x, \lambda) = -n \ln \lambda - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

l'emv $\widehat{\lambda}$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(x,\lambda) = \frac{-n}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(x,\lambda) &= 0 \Longrightarrow -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\
&\Longrightarrow n = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} x_i \\
&\Longrightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i
\end{aligned}$$

ainsi l'emv associé à λ est

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

verifions s'il est un maximum?

Il suffit de remarquer:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ Si } \boldsymbol{\lambda} < \widehat{\lambda} \textbf{ alors } \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(x,\lambda) > 0 \\ \bullet \text{ Si } \boldsymbol{\lambda} > \widehat{\lambda} \textbf{ alors } \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(x,\lambda) < 0 \end{array}\right. \quad avec \;\; \lambda > 0$$

2. Calculer $E(\widehat{\lambda})$, $Var(\widehat{\lambda})$, ainsi que l'erreur moyenne quadratique.Vérifier que $\widehat{\lambda}$ est fortement consistant

   On sait que

$$E(X_1) = \frac{1}{1/\lambda} = \lambda \qquad var(X_1) = \frac{1}{1/\lambda^2} = \lambda^2$$

   de plus des variables sont i.i.d, donc

$$E(\widehat{\lambda}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_1\right) = \lambda$$

   On en déduit que $\widehat{\lambda}$ est **un estimateur sans biais** de λ

$$Var(\widehat{\lambda}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var\left(X_1\right) = \frac{\lambda^2}{n}$$

   Or comme $\widehat{\lambda}$ est un estimateur sans biais de λ. Alors son erreur moyenne quadratique est égale à sa variance

   <u>La consistance</u>

   Grace a la loi forte des grands nombres on sait que $\widehat{\lambda} = \overline{X}$ converge presque sûrement vers $E(X_1) = \lambda$

   Donc notre estimateur est fortement consistant.$\widehat{\lambda} \xrightarrow{P.S} \lambda$

3. Calculer son information de Fisher, $I_n(\widehat{\lambda})$, en déduire s'il est éfficace.

L'information de Fisher est définie par:

$$\begin{aligned}
I_n(\widehat{\lambda}) &= -E(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln L(x,\lambda)) \\
&= -E(\frac{n}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{n} X_i) \\
&= -\frac{n}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\sum_{i=1}^{n} E(X_1) \\
&= -\frac{n}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} n\lambda \\
&= \frac{n}{\lambda^2}[-1+2] \\
&= \frac{n}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

L'efficacité

$$\left.\begin{array}{c} \bullet\ \widehat{\lambda} \textbf{ est un estimateur sans biais de } \lambda \\ \bullet\ \textbf{On a de plus } Var(\widehat{\lambda}) = \frac{\lambda^2}{n} = \frac{1}{I_n(\widehat{\lambda})} \end{array}\right\} \Longrightarrow \widehat{\lambda} \textbf{ est un estimateur efficace de } \lambda$$

Borne de Cramer Rao est atteinte

4. On suppose désormais que n = 1000 (soit "assez grand") et que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 3500$

a) Proposer un intervalle de confiance IC pour λ avec un niveau de confiance de 95%

$$\text{niveau de confiance de } 95\% \Longrightarrow \alpha = 5\% \Longrightarrow t_\alpha = 1.96 \quad \textit{table loi normale}$$

notre IC: intervalle de confiance est un intervalle de confiance pour la moyenne et est défini par:

$$\begin{aligned}
\lambda &\in [\overline{X} - t_\alpha \frac{\sigma_e}{\sqrt{n-1}};\ \overline{X} + t_\alpha \frac{\sigma_e}{\sqrt{n-1}}\ ] = [\overline{X} - t_\alpha \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}};\ \overline{X} + t_\alpha \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\ ] \\
\lambda &\in \left[3.5 - 1.96\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{1000}}; 3.5 + 1.96\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{1000}}\right]
\end{aligned}$$

b) Montrez que $P(\lambda \in IC) = P(\lambda \in [\widehat{\lambda} - t_\alpha \frac{1}{\sqrt{I_n(\widehat{\lambda})}};\ \widehat{\lambda} + t_\alpha \frac{1}{\sqrt{I_n(\widehat{\lambda})}}\ ])$

Il suffit d'utiliser le TCL pour la variable Z telle que:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{\widehat{\lambda} - E(\widehat{\lambda})}{\sqrt{Var(\widehat{\lambda})}} = \frac{\widehat{\lambda} - \lambda}{1/\sqrt{I_n(\widehat{\lambda})}} \\
&= \sqrt{I_n(\widehat{\lambda})}\left(\widehat{\lambda} - \lambda\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} N(0;1) \qquad \textit{selon} \;\; TCL
\end{aligned}$$

ainsi on aura

$$P(|Z| \leq 1.96) = 0.95 \quad \textit{table loi normale}$$

donc

$$\begin{aligned}
P(|Z| &\leq 1.96) = P(-1.96 \leq \sqrt{I_n(\widehat{\lambda})}\left(\widehat{\lambda} - \lambda\right) \leq 1.96) \\
&= P(\lambda \in [\widehat{\lambda} - 1.96\frac{1}{\sqrt{I_n(\widehat{\lambda})}};\ \widehat{\lambda} + 1.96\frac{1}{\sqrt{I_n(\widehat{\lambda})}}\ ])
\end{aligned}$$