Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

3ème année Licence Mathématiques
Semestre 6

Examen Final de Géométrie Différentielle
29 Mai 2023
Durée 1h 30mn

Exercice 1 (6 pts)

Soit l'application

$$\begin{aligned} \gamma :]0, 2\pi[&\rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \gamma(t) = \left(\sin(t), \tfrac{1}{2}\sin(2t)\right) \end{aligned}$$

1. Montrer que γ est une immersion.
2. Trouver une application f, C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f^{-1}(\{0\}) = \gamma(]0, 2\pi[)$.
3. Montrer que $\gamma(]0, 2\pi[)$ n'est pas une sous variété de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (6 pts)

Soit

$$M_r = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xyz = 1 \text{ et } x^4 + y^4 + z^4 = r\right\}$$

1. Pour quelles valeurs de $r > 0$, l'ensemble M_r est-il non vide ?
   Indication : utiliser l'inégalité arithmético-géométrique : $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$
   où $a_1, \ldots, a_n$ *sont des réels positifs.*
2. Dans ce cas, est-ce une sous variété de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 (4 pts)

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $U = V \times \mathbb{R}^n$. Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur U et $J : \chi(U) \longrightarrow \chi(U)$ l'endomorphisme qui à

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i(x) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \quad \text{associe} \quad J(X)(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

On désigne par C le champ défini par $C = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$; Montrer que :

$$J(X) = J([C, X]) - [J(X), C].$$

Exercice 4 (4 pts)

L'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) &\rightarrow \phi_t(x, y) = (x\cos(t) - y\sin(t), x\sin(t) + y\cos(t)) \end{aligned}$$

définit-elle un groupe à un paramètre ? Dans l'affirmative quel est ce groupe ?

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

3ème année Licence Mathématiques
Semestre 6

Corrigé de l'Examen final de Géométrie Différentielle
29 Mai 2023

Exercice 1 (6 pts)

$$\begin{array}{rl} \gamma :]0,2\pi[\to & \mathbb{R}^2 \\ t \to & \gamma(t) = (\sin(t), \frac{1}{2}\sin(2t)) \end{array}$$

1. **(2 pts)** On calcule : $\gamma'(t) = (\cos(t), \cos(2t))$. On a

$$\cos(t) = \cos(2t) = 0 \implies \left(t = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi\right) \text{ et } \left(t = \frac{\pi}{2} + l\pi\right) \text{ avec } k, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\implies k - 2l = \frac{1}{2} \text{ impossible car } k, l \in \mathbb{Z}$$

donc $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in]0, 2\pi[$. Ainsi γ est une immersion.

2. **(2 pts)** Trouver f telle que $f^{-1}(\{0\}) = \gamma(]0, 2\pi[)$.
On pose $M = \gamma(]0, 2\pi[)$. Donc $M = f^{-1}(\{0\}) = \left\{ \left(\sin(t), \frac{1}{2}\sin(2t) \right) / t \in]0, 2\pi[\right\}$.
Posons $x = \sin(t)$ et $y = \sin(2t)$. On aura

$$x^2 + y^2 = x^2(2 - x^2) \text{ c-à-d } x^2(x^2 - 1) + y^2 = 0$$

Par suite, f est définie par

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R}^2 \to & \mathbb{R} \\ (x, y) \to & f(x, y) = x^2(x^2 - 1) + y^2 \end{array}$$

3. **(2 pts)** Montrer que $\gamma(]0, 2\pi[)$ n'est pas une sous variété :
Soit $f(x, y) = x^2(x^2 - 1) + y^2$. La matrice jacobienne est :

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(x^2 - 1) & 2y \end{pmatrix}$$

Les points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ appartiennent à $M = \gamma(]0, 2\pi[)$, donc f n'est pas une submersion en tout points de $\mathbb{R}^2$.
$M = \gamma(]0, 2\pi[) = f^{-1}(\{0\})$ ne peut donc être une sous variété de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (6 pts)

On considère

$$M_r = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } xyz = 1 \text{ et } x^4 + y^4 + z^4 = r \right\}$$

1. **(2 pts)** Déterminons $r > 0$ tel que $M_r \neq \varnothing$.
M_r est non vide si et seulement si le système

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = r \end{cases}$$

admet au moins une solution. Or, d'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a

$$\sqrt[3]{x^4 y^4 z^4} = \sqrt[3]{(xyz)^4} = 1 \leq \frac{x^4 + y^4 + z^4}{3}$$

c-à-d $\dfrac{r}{3} \geq 1$. Par la suite, M_r est non vide pour $r \geq 3$.

2. M_r est-il une sous variété pour $r \geq 3$?
   On utilise la caractérisation par l'équation. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y, z) = (xyz - 1, x^4 + y^4 + z^4 - r)$$

   Il suffit de vérifier que f est une submersion en chaque point de M_r.
   Soit $m = (x, y, z) \in M_r$, la matrice jacobienne est :

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

   On suppose, par l'absurde, que df n'est pas surjective. Alors la matrice J_f est de rang < 2, donc tous ses mineurs 2×2 sont nuls, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = r \\ 4z(y^4 - x^4) = 0 \\ 4y(z^4 - x^4) = 0 \\ 4x(z^4 - y^4) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1 pt)}$$

   Alors : $x^4 = y^4 = z^4 = \dfrac{r}{3}$ **(0.5 pt)**

   (a) **(0.5 pt)** Si $r = 3$, alors $x = y = z = 1$ et comme $m = (1, 1, 1) \in M_3$, df n'est donc pas surjective. Ainsi, M_3 n'est pas une sous variété de $\mathbb{R}^3$.

   (b) **(1.5 pt)**Si $r > 3$, on a : $x^4 = y^4 = z^4 = \dfrac{r}{3}$ et $1 = xyz = \left(\dfrac{r}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$. C-à-d $r = 3$ absurde.
   f est une submersion si $r > 3$.
   Conclusion : M_r est une sous variété de R^3 de dimension 1 pour tout $r > 3$.

Exercice 3 (4 pts)

$J : \chi(U) \longrightarrow \chi(U)$ l'endomorphisme qui à

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i(x) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \quad \text{associe} \quad J(X)(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

et $C = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$; Montrer que :

$$J(X) = J([C, X]) - [J(X), C].$$

Le premier membre de l'égalité à vérifier est :

$$J(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

Pour le second membre, on a :

$$[C, X] = \sum_{i,j=1}^{n} y_j \frac{\partial X_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} y_j \frac{\partial Y_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} - \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \textbf{(1.5 pts)}$$

donc

$$J([C, X]) = \sum_{i,j=1}^{n} y_j \frac{\partial X_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

et

$$[J(X), C] = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial X_i}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \textbf{(1 pt)}$$

Ce qui donne

$$J\left([C, X]\right) - [J(X), C] = J(X). \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

et donc l'égalité demandée est vérifiée.

Exercice 4 (4 pts)

Soit l'application

$$\begin{array}{rl} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to & \mathbb{R}^2 \\ (t, (x, y)) \to \phi_t(x, y) = & (x\cos(t) - y\sin(t), x\sin(t) + y\cos(t)) \end{array}$$

ϕ définit-elle un groupe à un paramètre ?

a. $\phi_0(x, y) = (x, y)$. **(0.5 pt)**

b. $\phi_t(x, y) = (x\cos(t) - y\sin(t), x\sin(t) + y\cos(t))$.

$$\begin{aligned} \phi_s \circ \phi_t(x, y) &= \phi_s(\phi_t(x, y)) \\ &= ((x\cos(t) - y\sin(t))\cos(s) - (x\sin(t) + y\cos(t))\sin(s), \\ &\quad (x\cos(t) - y\sin(t))\sin(s) + (x\sin(t) + y\cos(t))\cos(s)) \\ &= (x\cos(s+t) - y\sin(s+t), x\sin(s+t) + y\cos(s+t)) \\ &= \phi_{s+t}(x, y) \qquad \textbf{(1 pt)} \end{aligned}$$

c. $\phi_{-t}(x, y) = (x\cos(t) + y\sin(t), -x\sin(t) + y\cos(t))$ **(0.5 pt)**. Or

$$\phi_t(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \phi_t^{-1}(x, y) &= \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x\cos(t) + y\sin(t), -x\sin(t) + y\cos(t)) \\ &= \phi_{-t}(x, y) \qquad \textbf{(1.5 pts)} \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un groupe à un paramètre, le groupe des rotations dans le plan. **(0.5 pt)**