Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Module L3: Transformations Intégrales

Contrôle continu du 16/03/2023(1h 30')
(corrigé +barème)

Exercice 1:07 pts Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda\ x))}{x(x^2+1)} dx.$$

1. **03 pts** Montrer que F est bien définie.
2. **03 pts** Montrer que F est dérivable. 3. **01 pt** Calculer sa dérivée.

Sol: (2 points). Montrer que F est bien définie.
On a bien $F(0) = 0$. Pour $\lambda \neq 0$ et $x > 0$, on on a aussi

$$\left| \frac{\sin(\lambda\ x))}{x(x^2+1)} \right| \leq \left| \frac{\sin(\lambda\ x))}{\lambda x} \frac{\lambda}{x^2+1} \right| \leq \frac{C(\lambda)}{x^2+1}.$$

Puisque $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1}$ est finie, $F(\lambda)$ est une intégrale indéfinie absolument convergente. On remarque que F est paire. 2. Montrons que F est dérivable Prenons $\lambda > 0$ et $\varepsilon \in (0, \lambda)$. On pose I l'intervalle $[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$ qui est contenu dan $(0, \infty)$. D'abord que $\lambda \mapsto \frac{\sin(\lambda\ x))}{x(x^2+1)}$ est dérivable sur $(0, \infty)$ et sa dérivée vaut $\frac{\cos(\lambda\ x))}{x^2+1}$. La deuxième hypothèse à vérifier est immédiate puisque

$$\left| \frac{\cos(\lambda\ x)}{x^2+1} \right| \leq \frac{1}{x^2+1},$$

uniformément sur $I \times (0, \infty)$. On en déduit que F est dérivable sur $(0, \infty)$ puis sur $\mathbb{R}_*$ par parité et que pour $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda\ x)}{x^2+1} dx = \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda\ x)}{x^2+1} dx + i \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda\ x)}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} e^{i\lambda\ x} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\lambda|} \end{aligned}$$

la dernière égalité est obtenu par le th.des résidus. **Exercice 2. 06 pts** Résoudre le système

$$\begin{cases} y_1' + 2y_2' + 3y_3' = 0 \\ y_1' - y_2' = 3x - 3 \\ y_2' + 2y_3 = 1 - x^2 \\ y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0 \end{cases}$$

Sol: Nous appliquons la transformée de Laplace au système, nous obtenons le système algébrique suivant

$$\begin{cases} sY_1 + 2sY_2 + 3Y_3 = 0 \\ sY_1 - sY_2 = \frac{3}{s^2} - \frac{3}{s} \\ sY_2 + 2Y_3 = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} \end{cases}$$

dont la solution est donnée par

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{-2}{s^2} + 3s^3 \\ Y_2 = \frac{1}{s^2} \\ Y_3 = \frac{-1}{s^3} \end{cases}$$

la transformation inverse donne

$$\begin{cases} y_1(x) = -2x + \frac{3}{2}x^2 \\ y_2(x) = x \\ y_3(x) = -\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

Exercice 3. 07 pts Soit $u(t,x)$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.Nous supposons qu'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que

$$|u| \le g(x), \quad \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \le g(x), \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \le g(x), \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \le g(x)$$

Résoudre l'EDP suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \qquad c \in \mathbb{R}$$

Sol: **Notons que les hypothèses permettent d'effectuer la dérivée sous le signe intégrale**. **01 pt** La transformée de Laplace de l'équation donne

$$\frac{\partial \widehat{u}(\omega,t)}{\partial t^2} = -c^2\omega^2 \widehat{u}(\omega,t)$$

qui est une EDO du deuxième ordre **02 pts** . La solution s'écrit **02 pts**

$$\widehat{u}(\omega,t) = \widehat{F}(\omega)\, e^{-i\omega ct} + \widehat{G}(\omega)\, e^{i\omega ct}$$

La transformation inverse donne **02 pts**

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega x} \widehat{u}(\omega,t)\, d\omega = F(x-ct) + G(x+ct)$$