Université Abou berkBelkaid Tlemcen (2022/2023)
Faculté des sciences
Département de mathématiques (L3)
Contrôle continu du module introduction aux processus aléatoires (1h30mn)
13/04/2023

EXERCICE N°1 (10 pts)

On définit un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité de probabilité f telle que:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les densités marginales, $f_X(x)$ *et* $f_Y(y)$respectivement de X et Y . Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ? (2.5pts)
2. Calculer les densités conditionnelles $f_{X/Y=y}(x)$ *et* $f_{Y/X=x}(y)$ (1 pt)
3. Déterminer la densité de la loi de Z; Z = X + Y . (2pts)
4. Calculer $P(X < Y).(1.5pts)$
5. Calculer la covariance de (X,Y); cov (X,Y) (2pts)
6. Calculer $E(Y/X = x)$ (1pts)

EXERCICE N°2 (10 pts)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X suit une loi de Bernoulli de paramétres "p" $0 < p < 1$ et Y est une loi géométrique, avec $P(Y = k) = (1-a) \cdot a^{k-1}$; $k \geq 1$; $0 < a < 1$

1. Calculer la fonction génératrice de Y (1pt)
2. On pose
$$U = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad X = 0 \\ Y & \text{Si} \quad X = 1 \end{cases}$$
Calculer la fonction génératrice de U, en déduire E(U) et E(U^2) (3pts)
3. Soit Z une variable aléatoire dont la fonction de masse est :
$$P(Z = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}; \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda > 0$$
   (a) Identifier Z, Calculer sa fonction génératrice. (1.5pts)
   (b) Calculer la loi de $Z + Z^{'} avec$ Z$'$une loi de Poisson de paramètre μ (1.5pts)
4. Soit V la variable aléatoire définit par:
$$V = \begin{cases} Y & \text{Si} \quad X = 0 \\ Z & \text{Si} \quad X = 1 \end{cases}$$
Calculer la fonction génératrice de V, en déduire E(V) et E(V^2) (3pts)

SOLUTION PROPOSEE

EXERCICE N°1

On définit un couple (X, Y) de variables aléatoires de densité de probabilité f telle que:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si} \quad (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les densités marginales, $f_X(x)$ *et* $f_Y(y)$respectivement de X et Y . Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ? (2.5pts)

   On remarque que $f(x,y) = f(y,x)$ de plus $D_X = D_Y = [0;1]$ la fonction etant symétrique et X et Y ont le meme domaine de variation, il suffit de faire les calculs pour une des variables et par analogie les en déduire pour l'autre (0.5pts)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \cdot dy \\ &= \int_0^1 (x+y) \cdot dy \\ &= \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 \\ &= x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Conclusion $f_X(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot 1_{[0;1]}(x)$ idem $f_Y(y) = \left(y + \frac{1}{2}\right) \cdot 1_{[0;1]}(y) \quad (1pt)$

   Par contre les variables ne sont pas indépendante car $f(x,y) \neq f_X(x) \times f_Y(y) \quad \forall \ (0.5pt)$

2. Calculer les densités conditionnelles $f_{X/Y=y}(x)$ *et* $f_{Y/X=x}(y)$ (1 pt)

$$f_{X/Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}} \qquad avec\ x \in [0;1]$$

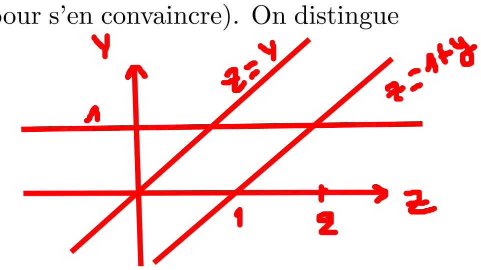
$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} \qquad avec\ y \in [0;1]$$

3. Déterminer la densité de la loi de Z; Z = X + Y . (2pts)

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) \cdot dy$$

   Le support: Il est clair que $z \in [0;2]$ vu que z=x+y, mais attetion il faut aussi que x=z-y ie $0 \leq z-y \leq 1$ Or selon le dessin, le domaine d'intégration change, (faire le dessin pour s'en convaincre). On distingue alors les cas où $z \in [0;1] \quad et \quad z \in [1;2]$

   Si $z \in [0;1]$



$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^z f(z-y,y) \cdot dy \\ &= \int_0^z z \cdot dy \\ &= z^2 \end{aligned}$$

Si $z \in [1;2]$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{z-1}^{1} f(z-y,y)\cdot dy \\ &= \int_{z-1}^{1} z\cdot dy \\ &= z\,[1-z+1] \\ &= 2z-z^2 \end{aligned}$$

Conculion

$$f_Z(z) = \begin{cases} z^2 & \text{si} \quad z\in[0;1] \\ 2z-z^2 & \text{si} \quad z\in[1;2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Calculer $P(X<Y).(1.5pts)$

$$\begin{aligned} P(X &< Y) = \int\int f(x,y)\cdot 1_{(X<Y)}\cdot dx\ dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_Y^1 (x+y)\ dx\right]\ dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2+xy\right]_Y^1\ dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}+y-\frac{1}{2}y^2-y^2\right)\ dy \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}y^2+y+\frac{1}{2}\right)\ dy \\ &= \left[-\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y\right]_0^1 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

5. Calculer la covariance de (X,Y) (2pts)

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)\ dx \\ &= \int_0^1 x\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\ dx \\ &= \int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{2}x\right)\ dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$E(X) = E(Y) = \frac{7}{12} \quad \text{par symétrie}$$

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (x+y)\ dx\ dy \\
&= \int_0^1 y \cdot \left[\int_0^1 \left(x^2+xy\right)\ dx\right]\ dy \\
&= \int_0^1 y \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y\right]_0^1\ dy \\
&= \int_0^1 y \cdot \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}\right)\ dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y\right)\ dy \\
&= \left[\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{6}y^2\right]_0^1 \\
&= 1/3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)\cdot E(Y) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{49}{144} \\
&= -\frac{1}{144}
\end{aligned}$$

6. Calculer $E(Y/X=x)$ (1pts)

$$\begin{aligned}
E(Y/X &= x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_{Y/x}(x)\ dy \\
&= \int_0^1 y \cdot \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\ dy \\
&= \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \int_0^1 (yx+y^2)\ dy \\
&= \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{3x+2}{6x+3}
\end{aligned}$$

EXERCICE N°2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X suit une loi de Bernoulli de paramétres "p" $0<p<1$ et Y est une loi géométrique, avec $P(Y=k)=(1-a)\cdot a^{k-1};\ \ k\geq 1;\ 0<a<1$

1. Calculer la fonction génératrice de Y (1pt)

$$\begin{aligned}
\Phi_Y(z) &= E(z^Y) \\
&= \sum_{k\geq 1} z^k P(Y=k) \\
&= \sum_{k\geq 1} z^k\,(1-a)\cdot a^{k-1} \\
&= (1-a)z \sum_{K\geq 0} (za)^K \qquad avec\ \ k=k-1 \\
&= \frac{(1-a)\,z}{1-az}
\end{aligned}$$

2. On pose

$$U = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad X = 0 \\ Y & \text{Si} \quad X = 1 \end{cases}$$

Calculer la fonction génératrice de U, en déduire E(U) et E(U^2) (3pts)

On remarque

$$Z^U = \begin{cases} Z^0 & \text{Si} \quad X = 0 \\ Z^Y & \text{Si} \quad X = 1 \end{cases} = 1 \times 1_{(X=0)} + Z^Y \times 1_{(X=1)}$$

Donc

$$\begin{aligned} \Phi_U(z) &= E(z^U) \\ &= E(1 \times 1_{(X=0)} + Z^Y \times 1_{(X=1)}) \\ &= P(X=0) + P(X=1)\ E(Z^Y) \\ &= 1 - p + p\frac{(1-a)\,z}{1-az} \end{aligned}$$

On sait que

$$E(U) = \Phi_U^{'}(1) \quad et \quad \Phi_U^{'}(z) = \frac{p(1-a)}{(1-az)^{\,2}}$$

$$E(U(U-1)) = \Phi_U^{"}(1) \qquad et \quad \Phi_U^{"}(z) = \frac{2p(1-a)a}{(1-az)^3}$$

Donc

$$E(U) = \frac{p}{1-a}$$

$$E(U(U-1)) = \frac{2pa}{(1-a)^{\,2}}$$

d'un autre coté

$$\begin{aligned} E(U(U-1)) &= E(U^2 - U) \\ &= E(U^2) - E(U) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad E(U^2) = E(U(U-1)) + E(U)$$

$$\Longrightarrow \quad E(U^2) = \frac{2pa}{(1-a)^{\,2}} + \frac{p}{1-a} = \frac{p(1+a)}{(1-a)^{\,2}}$$

3. Soit Z une variable aléatoire dont la fonction de masse est :

$$P(Z=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}; \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda > 0$$

(a) Identifier Z, Calculer sa fonction génératrice. (1.5pts)

Z est une loi de Poisson de paramètre λ

$$\begin{aligned} \Phi_Z(z) &= E(z^Z) \\ &= \sum_{k\geq 0} z^k P(Z=k) \\ &= \sum_{k\geq 0} z^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda z)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\cdot\exp(\lambda z) \\ &= e^{\lambda(z-1)} \end{aligned}$$

(b) Calculer la loi de $Z+Z^{'}$ *avec* Z' une loi de Poisson de paramètre μ (1.5pts)

$$\begin{aligned}
P(Z+Z^{'} &= k) = \left(P_Z * P_{Z'}\right)(k) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P_Z(i) \times P_{Z'}(k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \times e^{-\mu}\,\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!\,(k-i)!} \times \frac{1}{k!}\lambda^i \mu^{k-i} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \times \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \lambda^i \mu^{k-i} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \times \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Donc $Z+Z^{'}$ suit une loi de Poisson de paramètre $(\lambda+\mu)$

4. Soit V la variable aléatoire définit par:

$$V = \begin{cases} Y & \text{Si} \quad X=0 \\ Z & \text{Si} \quad X=1 \end{cases}$$

Calculer la fonction génératrice de V, en déduire E(V) et E(V^2) (3pts)

On remarque

$$Z^V = \begin{cases} Z^Y & \text{Si} \quad X=0 \\ Z^Z & \text{Si} \quad X=1 \end{cases} = Z^Y \times 1_{(X=0)} + Z^Z \times 1_{(X=1)}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Phi_V(z) &= E(z^Z) \\
&= E(Z^Y \times 1_{(X=0)} + Z^Z \times 1_{(X=1)}) \\
&= P(X=0)\ E(Z^Y) + P(X=1)\ E(Z^Z) \\
&= (1-p)\ \ \Phi_Y(z) + p\ \Phi_Z(z) \\
&= (1-p)\,\frac{(1-a)\,z}{1-az} + p\ e^{\lambda(z-1)}
\end{aligned}$$

On sait que

$$E(V) = \Phi_V^{'}(1) \quad et \quad \Phi_V^{'}(z) = \frac{(1-p)(1-a)}{(1-az)^{\,2}} + p\lambda e^{\lambda(z-1)}$$

$$E(V(V-1)) = \Phi_V^{''}(1) \qquad et \quad \Phi_V^{''}(z) = \frac{2\,(1-p)\,(1-a)a}{(1-az)^3} + p\lambda^2 e^{\lambda(z-1)}$$

On aura

$$E(V) = \frac{(1-p)}{(1-a)} + p\lambda$$

$$E(V(V-1)) = \frac{2\,(1-p)\,a}{(1-az)^2} + p\lambda^2$$

Conclusion

$$\Longrightarrow \quad E(V^2) = E(V(V-1)) + E(V)$$

$$\Longrightarrow \quad E(V^2) = \frac{(1-p)(1+a)}{(1-a)^{\,2}} + p\lambda(1+\lambda)$$