Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

3$^{\text{ème}}$ année Licence Mathématiques
Semestre 6

Contrôle Continu de Géométrie Différentielle
13 Avril 2023
Durée 1h 30mn

Questions de cours (5 pts)

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$.
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^∞ et M un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que $M = f^{-1}(\{0\})$.

1. Donner une condition suffisante sur f pour que M soit une sous variété de $\mathbb{R}^n$. On ne demande pas de démontrer que cette condition est suffisante.
2. Donner un exemple de couple (f, M) avec $p = n = 2$.
3. Donner un contre exemple avec $p = 1$, $n = 2$, f ne satisfait pas la condition et M (non vide) n'est pas une sous variété de dimension 1.

Exercice 1 (5 pts)

Étant donné les applications :

$$\begin{array}{l} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \quad (x, y) \to \qquad f(x, y) = (\exp(x)\cos(y), \exp(x)\sin(y), x^2 + y^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ \quad (x, y, z) \to \quad f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, xyz, x) \end{array}$$

Vérifier le théorème de composition, pour les matrices jacobiennes :

$$(J_{g \circ f})(x, y) = (J_g)(f(x, y))(J_f)(x, y)$$

Exercice 2 (5 pts)

On considère dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble

$$M_a = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ et } x^2 + y^2 - 2x = 0\right\}$$

où a est une constante strictement positive.

1. Montrer que M_a est une sous variété de $\mathbb{R}^3$ lorsque $a \neq 2$.
2. Montrer que le vecteur $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ est tangent à M_3 au point $(0, 0, 3)$ si $\alpha = \gamma = 0$.

Exercice 3 (5 pts)

Soit

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } z = x^2 + y^2\right\}$$

Calculer $T_{(1,0,1)}M$ par deux méthodes.

Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

3$^{\text{ème}}$ année Licence Mathématiques
Semestre 6

Corrigé du Contrôle continu de Géométrie Différentielle
13 Avril 2023

Questions de cours (5 pts)

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$.
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^∞ et M un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ tel que $M = f^{-1}\{0\}$.

1. Pour que M soit une sous variété de $\mathbb{R}^n$ il suffit que f soit une submersion, c'est à dire sa différentielle est une application surjective. **(1pt)**
2. *Un exemple de couple* (f, M) *avec* $p = n = 2$. **(2pts)**
Considérons l'application
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to \quad f(x, y) = (x, y) \end{aligned}$$
f est de classe C^∞, c'est l'application identité. De plus f est une submersion puisque sa jacobienne $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang maximal égal à 2 et on a :
$$f^{-1}(\{0\}) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2/(x, y) = 0\right\} = \{(0, 0)\}$$
Le couple $(Id, \{0\})$ est donc une sous variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0.
3. *Un contre exemple avec* $p = 1$, $n = 2$. **(2pts)**
Soit $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2 - y^2 = 0\}$ et
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to \quad f(x, y) = x^2 - y^2 \end{aligned}$$
f n'est pas une submersion en $(0, 0)$. De plus M est la réunion de deux droites distinctes ($y = x$ et $y = -x$) qui se coupent en 0. Par suite M n'est pas une sous variété de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1 (5 pts)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\to \quad f(x, y) = (\exp(x)\cos(y), \exp(x)\sin(y), x^2 + y^2) \\ g : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\to \quad f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, xyz, x) \end{aligned}$$

f et g sont bien deux fonctions de classe C^∞.

1. *La matrice jacobienne de* f *est donnée par* : **(1pt)**
$$(J_f)(x, y) = \begin{pmatrix} \exp(x)\cos(y) & -\exp(x)\sin(y) \\ \exp(x)\sin(y) & \exp(x)\cos(y) \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$
2. *La matrice jacobienne de* g *est donnée par* : **(1pt)**
$$(J_g)(u, v, w) = \begin{pmatrix} \dfrac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} & \dfrac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} & 0 \\ vw & uw & uv \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *La matrice jacobienne de $g \circ f$ en (x,y) est donnée par :* **(1pt)**

$$(J_{g\circ f})(x,y) = \begin{pmatrix} \exp(x) & 0 \\ (x^2+y^2+x)\exp(2x)\sin(2y) & (y\sin(2y)+(x^2+y^2)\cos(2y))\exp(2x) \\ \exp(x)\cos(y) & -\exp(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

4. *Vérification :* **(2pts)**

$$\begin{aligned}(J_{g\circ f})(x,y) &= (J_g)(f(x,y))(J_f)(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(y) & \sin(y) & 0 \\ (x^2+y^2)\exp(x)\sin(y) & (x^2+y^2)\exp(x)\cos(y) & \exp(2x)\cos(y)\sin(y) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad . \begin{pmatrix} \exp(x)\cos(y) & -\exp(x)\sin(y) \\ \exp(x)\sin(y) & \exp(x)\cos(y) \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \exp(x) & 0 \\ (x^2+y^2+x)\exp(2x)\sin(2y) & (y\sin(2y)+(x^2+y^2)\cos(2y))\exp(2x) \\ \exp(x)\cos(y) & -\exp(x)\sin(y) \end{pmatrix} \\ &= (J_{g\circ f})(x,y)\end{aligned}$$

La vérification est ainsi établie.

Exercice 2 (5 pts)

Soit $a > 0$. On considère

$$M_a = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } x^2+y^2+z^2 = a^2 \text{ et } x^2+y^2-2x = 0\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

1. *Montrons que M_a est une sous variété lorsque $a \neq 2$.*
Considérons la fonction **(0.5pt)**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\to \quad f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2-a^2, x^2+y^2-2x) \end{aligned}$$

f est de classe C^∞. De plus

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) &= \left\{(x,y,z) \in R^3 / x^2+y^2+z^2 = a^2, x^2+y^2-2x) = 0\right\} \\ &= M_a \cap \mathbb{R}^3 = M_a \qquad \textbf{(0.5pt)} \end{aligned}$$

Il suffit de montrer que f est une submersion en tout point si $a \neq 2$. La matrice jacobienne est :

$$(J_f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x-2 & 2y & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

Supposons que tout les mineurs d'ordre 2 de (J_f) sont nul. Soit, donc, le système suivant :

$$(I) \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x^2+y^2-2x = 0 \\ y = 0 \\ yz = 0 \\ z(x-1) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

(a) Supposons que $y = 0$ et $z \neq 0$, dans ce cas $x = 1$. Mais les points $(1,0,z) \notin M_a \quad (z \in \mathbb{R})$, par suite $rang(J_f) = 2$. **(0.5pt)**

(b) Supposons que $y = z = 0$, dans ce cas $x \neq 1$. Les deux premières équations nous donnent

$$\begin{cases} x^2 - a^2 = 0 \\ x(x-2) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(1pt)}$$

Ainsi $x = a = 2$. Le système (I) admet comme solution le point $(2, 0, 0)$, mais ce point appartient à M_a si $a = 2$.
D'où, $rang(J_f) = 2$ si $a \neq 2$.

Conclusion : f est une submersion si $a \neq 2$. Le sous ensemble M_a est, donc, une sous variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$ si $a \neq 2$.

2. *L'espace tangent à* M_3 *au point* $(0, 0, 3)$ *est donné par :*

$$\begin{aligned} T_{(0,0,3)}M_3 &= \ker(df(0,0,3)) \\ &= \left\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / -2\alpha = 0 \text{ et } 6\gamma = 0\right\} \\ &= Vect\{(0,1,0)\} \qquad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

Ainsi $v = (\alpha, \beta, \gamma) \in T_{(0,0,3)}M_3$ si $\alpha = \gamma = 0$. **(0.5pt)**

Exercice 3 (5 pts)

Considérons le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2\right\}$$

Déterminons $T_{(1,0,1)}M$.

1. *Méthode 1 :*
Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\to \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \end{aligned} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

La matrice Jacobienne de f est : $J_f(x, y, z) = (2x, 2y, 1) \neq (0, 0, 0) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, J_f est bien de rang 1. Par suite f est une submersion de classe C^∞ et on a $f^{-1}(\{0\}) = M$ qui est donc une sous variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$. **(0.5pt)**
L'espace tangent à M au point $(1, 0, 1)$ est donné par :

$$\begin{aligned} T_{(1,0,1)}M &= \ker(df(1,0,1)) \\ &= \left\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \ 2\alpha - \gamma = 0\right\} \\ &= Vect\{(1,0,2), (0,1,0)\} \qquad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

2. *Méthode 2.*
Considérons la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\to \quad g(x, y) = (x, y, x^2 + y^2) \end{aligned} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

g est de classe C^∞, sa matrice jacobienne est donnée par

$$J_g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

qui est de rang égal à 2 $\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$ **(0.5pt)**.

g est une immersion, de plus g est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur M et on a $g(\mathbb{R}^2) = M$ qui est donc une sous variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. **(0.5pt)**
L'espace tangent à M au point $(1,0,1) = g(1,0)$ est donné par :

$$\begin{aligned} T_{(1,0,1)}M &= Im(dg(1,0)) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} (\alpha,\beta) / \ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\} \qquad \textbf{(1,5pts)} \\ &= \{(\alpha,\beta,2\alpha)/\alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\,\{(1,0,2),(0,1,0)\} \end{aligned}$$

.