Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2022-2023
Module : Équations différentielles
Durée : 01h. 30min.

Niveau : ***Troisième Année Licence Mathématiques***

EXAMEN DE RATTRAPAGE DU JEUDI 22 JUIN 2023

Exercice 1 : 06 points.

On considère le système différentiel

$$X' = A.X, \tag{1}$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

2) Déterminer les vecteurs propres associés aux valeurs propres trouvées dans la question précédente.

3) En déduire les solutions du système (1).

Exercice 2 : 07 points.

On considère le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = \dfrac{t}{1+t^2}x_1(t) + \dfrac{1}{1+t^2}x_2(t), \\ \\ x_2'(t) = \dfrac{-1}{1+t^2}x_1(t) + \dfrac{t}{1+t^2}x_2(t). \end{cases} \tag{2}$$

1) Ecrire le système (2) sous la forme

$$X'(t) = A(t)X(t), \tag{3}$$

avec $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.

2) Montrer que $Y(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution du système différentiel (3).

3) Montrer que $Z(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ est une solution du système différentiel (3).

4) Calculer $W(t) = \text{dét}\begin{pmatrix} Y(t) & Z(t) \end{pmatrix}$.

5) En déduire que la famille $\{Y(t), Z(t)\}$ est un système fondamental de solutions du système différentiel (3).

6) Donner la matrice fondamentale du système différentiel (3).

7) En déduire les solutions du système différentiel (3).

8) Déterminer la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t), \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Exercice 3 : 07 points.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

avec $f(x(t)) = x(t)(x(t)-1)\left(x(t)-\frac{1}{2}\right)$ et $x_0 \geq 0$.

1) Dire pourquoi pour tout $x_0 \geq 0$, le problème de Cauchy (4) admet une unique solution maximale.

2) Déterminer les solutions constantes de l'équation différentielle

$$x'(t) = x(t)(x(t)-1)\left(x(t)-\frac{1}{2}\right).$$

3) On suppose que $0 < x_0 < \frac{1}{2}$ et on note par x la solution maximale du problème de Cauchy (4) et J son intervalle de définition.

3.1) Montrer que $\forall t \in J, x(t) > 0$.

3.2) Montrer que $\forall t \in J, x(t) < \frac{1}{2}$.

3.3) En déduire des questions 3.1) et 3.2) que $J = \mathbb{R}$.

3.4) En utilisant les questions 3.1) et 3.2) montrer que la fonction x est strictement croissante.

3.5) calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$.

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A. U. : 2022-2023
Module : Équations différentielles.

Corrigé de l'examen de rattrapage.

Exercice 1

1) Détermination des valeurs propres de la matrice A.

On a,

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\det(\lambda I_3 - A) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Par suite les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = -1$.

2 pts.

2) Les vecteurs propres associés aux valeurs propres trouvées dans la question précédente.

On note par V_1 le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 0$.

On a,
$$A.V_1 = \lambda_1 V_1.$$

C'est-à-dire,
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire,
$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ -2y - z = 0. \end{cases}$$

Alors on prend
$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1pt.

On note par V_2 le vecteur propre associé à $\lambda_2 = 1$.

On a,
$$A.V_2 = \lambda_2 V_2.$$

C'est-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

C'st-à-dire,

$$\begin{cases} z = x \\ y = y \\ -2y - z = z. \end{cases}$$

C'st-à-dire,

$$\begin{cases} z = x \\ y = -z \end{cases}$$

Alors on prend

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1 pt.

On note par V_3 le vecteur propre associé à $\lambda_3 = -1$.

On a,

$$A . V_3 = \lambda_3 V_3.$$

C'st-à-dire,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

C'st-à-dire,

$$\begin{cases} z = -x \\ y = -y \\ -2y - z = -z. \end{cases}$$

C'st-à-dire, $\begin{cases} z = -x \\ y = 0. \end{cases}$

1pt.

Alors on prend $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

3) En déduire les solutions du système differentiel (1).

On a,

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} V_3,$$

avec $c_i \in \mathbb{R}$, pour $i = 1, 2, 3$.

C'est-à-dire,

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^{t} + c_3 e^{-t} \\ -c_2 e^{t} \\ c_2 e^{t} - c_3 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

1pt.

Exercice 2

1) On a,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2} \\ -\frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix} X(t)$$

$$= A(t)\, X(t),$$

0,5 pts.

avec $$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2} \\ -\frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

2) Montrons que $Y(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution du système différentiel (3).

On a,

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$A(t)\,Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2} \\ -\frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{t^2+1}{1+t^2} \\ \frac{-t+t}{1+t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 pt.

Alors,

$$Y'(t) = A(t)\,Y(t).$$

C'est-à-dire Y est une solution du système différentiel (3).

3) Montrons que $Z(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$ est une solution du système différentiel (3).

On a,
$$Z'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et
$$A(t)\,Z(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{1+t^2} & \frac{1}{1+t^2} \\ -\frac{1}{1+t^2} & \frac{t}{1+t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-t+t}{1+t^2} \\ \frac{1+t^2}{1+t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,
$$Z'(t) = A(t)\,Z(t).$$
1pt.

C'est-à-dire Z est une solution du système différentiel (3).

4) On a,
$$W(t) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2+1.$$
1pt.

5) En déduire que la famille $\{Y(t), Z(t)\}$ est un système fondamental de solutions du système différentiel (3).

On a,

i) Les fonctions Y et Z sont solutions du système différentiel (3),

et

ii) Les fonctions Y et Z sont linéairement indépendantes car $W(t) = t^2+1 \neq 0$.

1pt.

Alors, la famille $\{Y(t), Z(t)\}$ est un système fondamental de solutions du système différentiel (3).

6) La matrice fondamental du système différentiel (3) est donnée par

$$M(t) = \begin{pmatrix} Y(t) & Z(t) \end{pmatrix}$$

1pt.

$$= \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

7) Les solutions du système différentiel (3) sont données par

$$X(t) = M(t)\,K, \text{ avec } K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}, \quad k_i \in \mathbb{R}, \text{ pour } i = 1,2.$$

$$= \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

0,5 pts.

8) La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)\,X(t), \\ X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

est donnée par

$$X(t) = M(t)\,M^{-1}(0) \,.\, X(0)$$

$$= \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1 pt.

$$= \begin{pmatrix} -t+1 \\ -1-t \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

1) La fonction f est de classe C^1 donc elle est localement lipschitzienne. Par suite d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz pour tout $x_0 \geq 0$, le problème de Cauchy (4) admet une unique solution maximale.

1pt.

2) Les solutions constantes de l'équation différentielle

$$x'(t) = x(t)\,(x(t) - 1)\,(x(t) - \tfrac{1}{2}),$$

sont $\quad x \equiv 0, \quad x \equiv 1 \;$ et $\; x \equiv \frac{1}{2}$.

1pt.

3)

3.1) Montrons que $\forall t \in J, \; x(t) > 0$.

Supposons qu'il existe $t_* \in J$, tel que $x(t_*) = 0$.

Considérons le problème de Cauchy

$$(Ch1) \quad \begin{cases} y'(t) = y(t)\,(y(t) - 1)\,(y(t) - \frac{1}{2}), \\ y(t_*) = 0. \end{cases}$$

Le problème de Cauchy (Ch1) admet deux solutions la solution x et la fonction identiquement nulle. 1pt.

Contradiction car le problème de Cauchy (Ch1) admet une unique solution.

3.2) Montrons que $\forall t \in J,\ x(t) < \frac{1}{2}$.

Supposons qu'il existe $t_1 \in J$ tel que $x(t_1) = \frac{1}{2}$.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(Ch2) \begin{cases} y'(t) = y(t)\,(y(t) - 1)\,(y(t) - \frac{1}{2}), \\ y(t_1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Le problème de Cauchy (Ch2) admet deux solutions 1pt.

la fonction x et la fonction $z \equiv \frac{1}{2}$.

Contradiction car le problème de Cauchy (Ch2) admet une unique solution.

3.3) Montrons que $J = \mathbb{R}$.

Supposons que $J =]a, b[$, avec $|a| < +\infty$ et $b < +\infty$.

Alors, on a

$$\lim_{t \overset{>}{\to} a} x(t) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \overset{<}{\to} b} x(t) = \infty.$$

Contradiction car $\forall t \in J$, $0 < x(t) < \frac{1}{2}$, c'st-à-dire la fonction x est bornée. Par suite $J = \mathbb{R}$.

1pt.

3.4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$x'(t) = x(t)\left(x(t) - 1\right)\left(x(t) - \frac{1}{2}\right).$$

Comme,

$$0 < x(t) < \frac{1}{2},$$

on a

$$x(t)\left(x(t) - 1\right)\left(x(t) - \frac{1}{2}\right) > 0.$$

C'st-à-dire,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) > 0.$$

1pt.

C'st-à-dire la fonction x est strictement croissante.

3.5) Comme la fonction x est croissante et majorée, alors $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$.

On a,

$\forall t \in \mathbb{R}$, $$x'(t) = x(t)\,(x(t)-1)\,(x(t)-\tfrac{1}{2}).$$

Alors,

$$\lim_{t \to +\infty} x'(t) = \lim_{t \to +\infty} x(t)\,(x(t)-1)\,(x(t)-\tfrac{1}{2}).$$

C'est-à-dire, $$0 = \ell(\ell-1)(\ell-\tfrac{1}{2}).$$ 1pt.

On prend $\ell = \frac{1}{2}$ car $\forall t \in J$, $0 < x(t) < \frac{1}{2}$ et $x_0 > 0$ et la fonction $t \mapsto x(t)$ est strictement croissante, c'est-à-dire,

$$x_0 \leq \lim_{t \to +\infty} x(t) \leq \frac{1}{2}.$$