Université de Tlemcen Faculté des Sciences Département de Mathématiques

Troisième Année Licence Mathématiques Semestre S5
Module : Optimisation sans Contraintes – Examen de Rattrapage
Juin 2022 – 2023 – Durée 01h30 mn

Exercice 1 : 9 points

Soit la fonction f définie par :

$$f : R^2 \to R$$
$$(x,\ y) \mapsto y^4 - 3xy^2 + x^2.$$

1. Déterminer les points critiques de *f*.
2. Soit $d = (d_1,\ d_2) \in R^2$. En utilisant l'application $\varphi : t \mapsto f(td_1,\ td_2)$, montrer que $(0,0)$ est un minimum local le long de toute droite passant par $(0,0)$.
3. Le point $(0,\ 0)$ est-il un minimum local de la restriction de *f* à la parabole d'équation $x = y^2$?
4. Calculer la matrice hessienne de *f*. Quelle est la nature du point critique $(0,0)$?

Exercice 2 : 11 points

Soit $n,\ p \in N^*$. Soit $A \in M_{p,n}(R)$ une matrice rectangulaire et $b \in R^p$ un vecteur. Soit la fonctionnelle $f : R^n \to R$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 .$$

1. Montrer que *f* est une fonctionnelle quadratique c'est à dire trouver la matrice $A' \in M_n(R)$, le vecteur $b' \in R^n$ et la constante $c' \in R$ tels que
$$\forall x \in R^n,\ f(x) = \frac{1}{2} x^T A' x - (b')^T x + c'.$$
2. Donner l'expression du gradient $\nabla f(x)$ et du hessien $\nabla^2 f(x)$ de *f* en tout point $x \in R^n$.
3. Soit $x \in R^n$ tel que $\nabla f(x) \neq 0$, montrer que :
$$d \in R^n \text{ est une direction de descente si et seulement si } (Ax - b)^T Ad < 0.$$
(En particulier $Ad \neq 0$)
4. Soit $x \in R^n$ tel que $\nabla f(x) \neq 0$ et *d* une direction de descente au point *x*. Montrer que le problème d'optimisation
$$\min_{t \in R} f(x + td),$$
admet une solution donnée par : $t^* = \dfrac{\nabla f(x)^T d}{\|Ad\|^2}$.
5. Donnez les grandes lignes de l'algorithme du gradient à pas optimal appliqué à la résolution du problème : $\min_{x \in R^n} f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$.

Corrigé type

Exercice 1

1. Déterminer les points critiques de f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ y)=-3y^2+2x,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)=4y^3-6xy.$$

Par suite :

$$\begin{cases}-3y^2+2x=0\\ 4y^3-6xy=0\end{cases}.$$

0.5+0.5

D'où $x=\frac{3}{2}y^2$, par suite $-5y^3=0$ soit $(x,\ y)=(0,\ 0)$ est le seul point critique. 0.5+0.5+0.5

2. Soit l'application $\varphi : t \mapsto f(td_1,\ td_2)$, montrons que $(0,0)$ est un minimum local le long de toute droite passant par $(0,0)$.

En utilisant l'application $f(td_1,\ td_2)=(td_2)^4-3(td_1)(td_2)^2+(td_1)^2=t^4d_2^4-3t^3d_1d_2^2+t^2d_1^2$. Soit $d_1\neq 0$ puisque $\varphi'(t)=4t^3d_2^4-9t^2d_1d_2^2+2d_1^2t$ et $\varphi''(t)=12t^2d_2^4-18td_1d_2^2+2d_1^2$ On a $\varphi'(0)=0$ et $\varphi''(0)=2d_1^2>0$, donc 0 est un minimum local de φ. Si $d_1=0$ et $d_2\neq 0$, alors $f(0,\ td_2)=t^4d_2^4$ et 0 est un minimum local de φ., enfin, le cas $d=0$ est trivial. 1+1+0.5

3. Le point $(0,\ 0)$ est-il un minimum local de la restriction de f à la parabole d'équation $x=y^2$?

Soit $(x,\ y)\in R^2$ tel que $x=y^2$ Alors $f(x,\ y)=-y^4$ et il est alors clair que $f(x,\ y)<f(0,\ 0)$ si $x=y^2$ et y suffisamment proche de 0. Par conséquent 0 est un max local de la restriction de f à cette parabole. 0.5+0.5+0.5

4. Calculons la matrice hessienne de f et étudions la nature du point critique $(0,0)$.

On a $Hf(x,\ y)=\begin{pmatrix}2 & -6y\\ -6y & 12y^2-6x\end{pmatrix}$ et $Hf(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Puisqu'une valeur propre de la hessienne en (0, 0) est nulle, on ne peut rien conclure de ce calcul. En revanche, les deux questions précédentes prouvent que *(0, 0)* est un point selle de *f*. 1+1+0.5

Exercice 2

1. Montrons que f est une fonctionnelle quadratique.

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}\|Ax-b\|^2=\frac{1}{2}(Ax-b)^T(Ax-b)\\ &=\frac{1}{2}\left(x^TA^TAx-x^TA^Tb-b^TAx+b^Tb\right).\\ &=\frac{1}{2}x^TA^TAx-A^Tbx+\frac{1}{2}b^Tb=\frac{1}{2}x^TA'x-b'x+c',\end{aligned}$$

2.25

avec, $A'=A^TA$, $b'=A^Tb$ et $c'=\frac{1}{2}b^Tb.$ 0.75

2. Calcul du gradient $\nabla f(x)$ et du hessien $\nabla^2 f(x)$ de f en tout point $x\in R^n$.

$\nabla f(x)=A'x-b'=A^TAx-A^Tb.$

$\nabla^2 f(x)=A'=A^TA.$

2

3. Soit $x\in R^n$ tel que $\nabla f(x)\neq 0$, montrer que :

$$d\in R^n \text{ est une direction de descente si et seulement si } (Ax-b)^TAd<0.$$

Soit $d \in R^n$ une direction de descente de f en x alors on a $\nabla f(x)^T d < 0$, soit $(A'x - b')^T d < 0$, soit $\left(A^T Ax - A^T b\right)^T d < 0$, enfin $(Ax - b)^T Ad < 0$.

0.5+0.5+0.5+0.5

4. Soit $x \in R^n$ tel que $\nabla f(x) \neq 0$ et d une direction de descente au point x. résolvons le problème d'optimisation

$$\min_{t \in R} f(x + td),$$

La fonction : $\phi : t \mapsto f(x + td)$ est un trinôme du second degré pour la variable t, en effet

$\phi(t) = f(x + td) = f(x) + t\left(A^T (Ax - b)\right)^T d + \frac{t^2}{2}\|Ad\|^2.$

0.5

Cette fonction atteint son minimum au point *t* satisfaisant

$\left(A^T (Ax - b)\right)^T d + t\|Ad\|^2 = 0$

0.5

D'où $t^* = -\frac{\nabla(x)^T d}{\|Ad\|^2}.$

0.5

Algorithme
Voit cours

2.5