Université de Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques
A.U. 2022/2023
3 ème année licence

Rattrapage : Analyse hilbertienne et espaces normés

Durée: 1h30

Exercice 1 (05 points)

Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et d'une norme associée $\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$. Soit $u, v \in E$, on pose $w = u - \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$, $v \neq 0$.

1/ Montrer que $\|w\|^2 = \|u\|^2 - \dfrac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2}$.

2/ Endéduire l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

3/Ecrire explicitement, l'inégalité de Cauchy Schwartz pour:

i/ $E = \mathbb{R}^n$, $\langle X, Y \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ pour $X, Y \in E$.

ii/ $E = C\left([-1, 1], \mathbb{R}\right), \langle f, g \rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$ pour $f, g \in E$.

Exercice 2 (07 points)

$E = C\left([0, +\infty[, \mathbb{R}\right)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} f(x)\, g(x)\, dx$.

On donne la famille $\{f_0, f_1\}$ telle que $f_0(x) = 1$ et $f_1(x) = x$. On considère les sous espaces suivants:

$F_0 = span\{f_0\}$ et $F_1 = span\{f_0, f_1\}$.

1/ Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x - \lambda, 1 \rangle = 0$.

2/ Calculer $\|f_0\|$ et $P_{F_0}(f_1)$ la projection de f_1 sur F_0.

3/ Déterminer une base orthonormée de F_1.

Exercice 3 (08 points)

Soit E l'espace préhilbertien des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int\limits_{0}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$.

on considère la suite (f_n) définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n^3} \\ \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} & \frac{1}{n^3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1/ Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue i.e $f_n \in E$.

2/ Montrer que que pour tout $p, q \in \mathbb{N}^*, p > q$, on a $\|f_p - f_q\|^2 = \frac{1}{p} + \frac{q^2}{p^3} - 2\frac{q}{p^2}$. Endéduire que (f_n) est de Cauchy.

3/ Etudier la convergence de (f_n) dans E. Que peut on déduire?.