Université de Tlemcen Faculté des Sciences Département de Mathématiques

Troisième Année Licence Mathématiques Semestre S5
Module : Optimisation sans Contraintes – Contrôle Continu
Jeudi 24/11/2022 – Durée 01h30mn

Exercice 1 : **13 points**
On désire résoudre par la méthode du gradient à pas optimal le problème de minimisation suivant:

$$\min_{(x,y)\in R^2} f(x,y) = \frac{1}{4}\left(x^2 + cy^2\right) \; où \; c \geq 1.$$

1. Ecrire la fonction *f* sous forme d'une fonctionnelle quadratique c'est-à-dire, trouver la matrice *A* telle que
$$f(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
2. Calculer les valeurs propres de *A*. Déduire le taux de convergence de la méthode du gradient optimal appliquée à ce problème.
3. Calculer le pas de déplacement α correspondant à la minimisation de la fonction de mérite :
$$\min_{\alpha>0} \varphi(\alpha) = f\left(\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \alpha \nabla f(x_k, y_k)\right).$$
4. Soit le point de coordonnées $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ obtenu à l'itération *k*, Calculer x_{k+1} et y_{k+1} composantes de l'itération suivante en fonction de x_k et y_k.
5. Prenons *c=1*, montrer que pour ce cas l'algorithme du gradient à pas optimal appliqué à ce problème converge en une itération.

Exercice 2 : 7 points :
Considérons la fonction de Rosenbrock *f* définie par :

$$f : R^2 \to R$$
$$(x,y) \mapsto (x-1)^2 + 10\left(x^2 - y\right)^2.$$

1. Montrer que la fonction *f* admet un seul point stationnaire $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ à déterminer.
2. Montrer que ce point est un minimum local strict de *f*.
3. Calculer la valeur minimale de *f* en $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$. En déduire que $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ est un minimum global de *f*.

Bon courage

Corrigé

Exercice 1

1.On a $f(x,y)=\frac{1}{4}\left(x^2+cy^2\right)$ *où* $c\geq 1$ alors :

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{c}{2}y^2\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{c}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$ 2

Donc : $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{c}{2}\end{pmatrix}$. 1

2. Evidemment, les valeurs propres de A sont ; $\frac{1}{2}$ et $\frac{c}{2}$ 1

1. le taux de convergence de la méthode du gradient optimal appliqué à ce problème.est :

$$\tau=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{c}{2}}=\frac{1}{c}$$ 1

Ou bien on peut calculer le rapport de convergence, soit $r=\left(\frac{\frac{c}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{c}{2}+\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\frac{c-1}{c+1}\right)^2=$

3. Le pas de déplacement α est solution de l'équation : $\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=0$

$$\varphi(\alpha)=f\left(\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}-\alpha\nabla f(x_k,y_k)\right)=\frac{1}{4}\left(\left(x_k-\alpha\frac{1}{2}x_k\right)^2+c\left(y_k-\alpha\frac{c}{2}y_k\right)^2\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)^2x_k^2+\frac{c}{4}\left(1-\frac{c\alpha}{2}\right)^2y_k^2.$$ 1

Par suite :

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)x_k^2-\frac{c^2}{4}\left(1-\frac{c\alpha}{2}\right)y_k^2$$ 1

Ainsi

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=0\Rightarrow\alpha=2\frac{x_k^2+c^2y_k^2}{x_k^2+c^3y_k^2}$$ 2

On a

$$\begin{pmatrix}x_{k+1}\\ y_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}-\alpha\nabla f(x_k,y_k)=\begin{pmatrix}x_k\\ y_k\end{pmatrix}-2\frac{x_k^2+c^2y_k^2}{x_k^2+c^3y_k^2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_k\\ \frac{c}{2}y_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{c^2(c-1)x_ky_k^2}{x_k^2+c^3y_k^2}\\ -\frac{(c-1)x_k^2y_k}{x_k^2+c^3y_k^2}\end{pmatrix}.$$ 2

Finalement, on a :

$$x_{k+1}=\frac{c^2(c-1)x_ky_k^2}{x_k^2+c^3y_k^2}\quad y_{k+1}=\frac{-(c-1)x_k^2y_k}{x_k^2+c^3y_k^2}.$$ 1

5. Evidement, pour c=1 on :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}.$$ 1

Exercice 2 :

1. Montrons que la fonction f admet un seul point stationnaire $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$.

On sait que le point stationnaire $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ est solution de l'équation d'Euler : $\nabla f(x,\ y) = 0$. Or 0.5

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2(x-1) + 40x(x^2 - y) \\ -20(x^2 - y) \end{bmatrix}.$$ 0.5

Par suite

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ 1

2. Montrons que $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ est un minimum local strict de *f*.

Calculons le Hessien de *f* en $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$.

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 120x^2 - 40y + 2 & -40x \\ -40x & 20 \end{bmatrix}.$$ 1

D'où,

$$\nabla^2 f(x^*,\ y^*) = \begin{bmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{bmatrix}.$$ 0.5

Or, $|82| > 0$ et $\begin{vmatrix} 82 & -40 \\ -40 & 20 \end{vmatrix} = 40 > 0$ donc, $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ est un minimum local strict de *f*. 1

3. Calculons la valeur minimale de *f* en $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$.

$$f(x^*,\ y^*) = f(1,1) = 0.$$ 0.5

Déduisons que $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ est un minimum global de *f*.

Puisque pour tout $(x,y) \in R^2$ on a $f(x,y) \geq 0 = f(1,1)$ donc le point $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ est un minimum global de *f*. 2