Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2022-2023
Module : Equations différentielles
Durée : 01h. 30min.

Niveau : ***Troisième Année Licence Mathématiques***

CONTRÔLE CONTINU.

Exercice 1 (09 points)

En dynamique des populations, le modèle le plus simple est de relier les variations de taille à la population existante. Autrement dit, si $x(t)$ désigne le nombre d'individus au temps t, les variations de $x(t)$ sont données par l'équation différentielle

$$x'(t) = \lambda . x(t), \tag{1}$$

où λ est un paramètre réel.strictement positif.

Afin d'intégrer certains freins à la croissance infinie de ces systèmes, tels les limitations environnementales pour des modèles de populations, les limitations de ressources naturelles, ou encore les barrières financières, on utilise souvent le modèle logistique suivant, aussi appelé modèle de Verhulst-Pearl.

$$x'(t) = \lambda . x(t) . \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \tag{2}$$

où K est un paramètre réel strictement positif représente la capacité, et la taille limite du système.

1) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (1).
2) Déterminer les solutions constantes de l'équation différentielle (2).
3) On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda . x(t) . \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3}$$

avec $0 < x_0 < K$.

Rappeler pourquoi, le problème de Cauchy (3) admet une unique solution maximale.

4) Montrer que la solution du problème de Cauchy (3) est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0) e^{-\lambda t}}.$$

5) Calculer $\lim\limits_{t \to -\infty} x(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$.
6) Montrer que la fonction $t \mapsto x(t)$ est strictement croissante.

Exercice 2 (11 points)

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) - \frac{y(t)}{t} - y^2(t) = -9t^2, \ t > 0, \\ y(1) = 4. \end{cases} \tag{4}$$

1) Rappeler pourquoi, le problème de Cauchy (4) admet une unique solution maximale $\varphi : J \mapsto \mathbb{R}$.
2) Vérifier que la fonction $t \mapsto 3t$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'(t) - \frac{y(t)}{t} - y^2(t) = -9t^2,$$

où $t > 0$.
3) Montrer que la fonction $t \mapsto 3t - \varphi(t)$ ne s'annule pas sur J.
4) Pour tout $t \in J$, on définit la fonction ψ par

$$\psi(t) = \frac{1}{3t - \varphi(t)}.$$

4.1) Vérifier que $\forall t \in J,\ \varphi(t) = -\dfrac{1}{\psi(t)} + 3t$.

4.2) Montrer que la fonction ψ est solution du problème de Cauchy

$$(5) \qquad \begin{cases} \psi'(t) + \left(6t + \frac{1}{t}\right)\psi(t) = 1,\ t > 0, \\ \psi(1) = -1. \end{cases}$$

4.3) Montrer que la solution du problème de Cauchy (5) est donnée par

$$\forall t > 0, \psi(t) = \frac{1}{6t} - \frac{7}{6t} e^{3\left(1-t^2\right)}.$$

4.4) En déduire la solution φ du problème de Cauchy (4).

Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

A.U. : 2022-2023
Module: Équations différentielles.

Niveau : Troisième Année Licence Mathématiques.

Corrigé du contrôle continu du Jeudi 24 novembre 2022

Exercice 1 : 09 points

1) Les solutions de l'équation différentielle (1).

On a,

$$x'(t) = \lambda . x(t) \qquad (1)$$

Tout d'abord $x \equiv 0$ est une solution de (1).

Maintenant si $x \neq 0$, on a

$$\frac{dx}{x} = \lambda . dt$$

Alors,

$$\int \frac{dx}{x} = \lambda . \int dt$$

Ce qui donne,

$$\ln|x(t)| = \lambda t + \alpha, \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t}, \quad \text{avec } C_1 \in \mathbb{R}^*.$$

Par suite les solutions de (1) sont

$$x(t) = C e^{\lambda t}, \quad \text{ave } C \in \mathbb{R}.$$

1pt

2) Les solutions constantes de l'équation différentielle (2).

On a,

$$x'(t) = \lambda x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \quad (2)$$

Alors les solutions constantes de (2) sont $x \equiv 0$ et $x \equiv K$. 1pt

3) On a

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3)$$

avec $0 < x_0 < K$.

Comme la fonction $(t, x) \longmapsto f(t,x) = \lambda x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors pour tout $x_0 \in]0, K[$, 2pts le problème de Cauchy (3) admet une unique solution maximale d'après le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz.

4) On a,

$$x'(t) = \lambda x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

Comme $x \equiv 0$ et $x \equiv K$ ne sont pas des solutions du problème de Cauchy (3), on a

$$\frac{dx}{x\left(1-\frac{x}{K}\right)} = \lambda\, dt$$

Alors $$\int \frac{dx}{x\left(1-\frac{x}{K}\right)} = \lambda \int dt$$

C'est-à-dire

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{K\left(1-\frac{x}{K}\right)}\right) dx = \lambda \int dt$$

C'est-à-dire, $$\ln \left| \frac{x(t)}{1-\frac{x(t)}{K}} \right| = \lambda t + k_1 \ , \ k_1 \in \mathbb{R}$$

Ce qui donne

$$\frac{x(t)}{1-\frac{x(t)}{K}} = k_2 e^{\lambda t}$$

C'est-à-dire,

$$x(t) = \frac{K k_2 e^{\lambda t}}{K + k_2 e^{\lambda t}}$$

Comme $x(0) = x_0$, on obtient $k_2 = \frac{K x_0}{K - x_0}$, ce qui donne

$$x(t) = \frac{\frac{K^2 x_0}{K - x_0} e^{\lambda t}}{K + \frac{K x_0}{K - x_0} e^{\lambda t}}$$

2pts

$$= \frac{K x_0 e^{\lambda t}}{(K - x_0) + x_0 e^{\lambda t}}$$

$$= \frac{K x_0}{(K - x_0) e^{-\lambda t} + x_0}$$

On note que cette solution est définie sur $\mathbb{R}$.

5) On a,

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = \lim_{t \to -\infty} \frac{K x_0}{(K - x_0) e^{-\lambda t} + x_0}$$ 1pt

$$= 0 \quad \text{car} \quad \lim_{t \to -\infty} e^{-\lambda t} = +\infty \quad (\text{voir que } \lambda > 0).$$

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{K x_0}{(K - x_0) e^{-\lambda t} + x_0} = \frac{K x_0}{x_0} = K.$$ 1pt

6) Montrons que la fonction $t \longmapsto x(t)$ est strictement croissante.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$x'(t) = \frac{K x_0 \lambda (K - x_0) e^{-\lambda t}}{\left[x_0 + (K - x_0) e^{-\lambda t}\right]^2}$$ 1pt

$$> 0 \quad \text{car } K > 0,\ x_0 > 0,\ \lambda > 0 \text{ et } K - x_0 > 0.$$

Alors la fonction $t \longmapsto x(t)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : (11 points).

1) Comme la fonction $(t,y) \longmapsto g(t,y) = \frac{y}{t} + y^2(t) - 9t^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, alors d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz le problème de Cauchy

2pts

$$\begin{cases} y'(t) - \frac{y(t)}{t} - y^2(t) = -9t^2, \ t>0, \\ y(1) = 4, \end{cases}$$

admet une unique solution maximale φ définie sur un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$.

2) On a,

1pt

$$y(t) = 3t, \quad t>0.$$

Alors,
$$y'(t) = 3.$$

Par suite,
$$y'(t) - \frac{y(t)}{t} - y^2(t) = 3 - 3 - 9t^2$$
$$= -9t^2.$$

C'est-à-dire, la fonction $t \longmapsto 3t$ est une solution particulière de $y'(t) - \frac{y(t)}{t} - y^2(t) = -9t^2$.

3) Montrons que la fonction $t \mapsto 3t - \varphi(t)$ ne s'annule pas sur J.

Pour tout $t \in J$, on pose

$$L(t) = 3t - \varphi(t).$$

Alors,

$$L'(t) = 3 - \varphi'(t)$$

$$= 3 - \frac{\varphi(t)}{t} - \varphi^2(t) + 9t^2$$

$$= 3 - \frac{3t - L(t)}{t} - (3t - L(t))^2 + 9t^2$$

$$= \frac{L(t)}{t} + 6tL(t) - L^2(t).$$

Supposons par absurde qu'il existe $t_* \in J$ tel que $L(t_*) = 0$.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} L'(t) = \dfrac{L(t)}{t} + 6tL(t) - L^2(t) \\ L(t_*) = 0 \end{cases} \quad (Ch)$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy (Ch) admet une unique solution qui est $L \equiv 0$.

Alors pour $t = 1$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= L(1) \\ &= 3 - \varphi(1) \\ &= 3 - 4 = -1 \end{aligned}$$

2pts

Contradiction.

Par suite, $\forall t \in J,\ L(t) \neq 0$.

4)

4.1) Pour tout $t \in J$, on a

$$\psi(t) = \frac{1}{3t - \varphi(t)}$$

1pt

Alors, $$3t - \varphi(t) = \frac{1}{\psi(t)}$$

Ce qui donne,

$$\forall t \in J,\ \varphi(t) = 3t - \frac{1}{\psi(t)}$$

4.2) On a,

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\psi(t)} + 3t.$$

Alors, $$\varphi'(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)} + 3.$$

Comme,

$$\varphi'(t) = \frac{\varphi(t)}{t} + \varphi^2(t) - 9t^2$$

$$= -\frac{1}{t\psi(t)} + 3 + \left(-\frac{1}{\psi(t)} + 3t\right)^2 - 9t^2$$

$$= -\frac{1}{t\psi(t)} + 3 + \frac{1}{\psi^2(t)} - \frac{6t}{\psi(t)},$$

on obtient

$$\frac{\psi'(t)}{\psi^2(t)} + 3 = -\frac{1}{t\psi(t)} + 3 + \frac{1}{\psi^2(t)} - \frac{6t}{\psi(t)}.$$

C'est-à-dire, $$\psi'(t) = -\left(\frac{1}{t} + 6t\right)\psi(t) + 1.$$

C'est-à-dire $$\psi'(t) + \left(\frac{1}{t} + 6t\right)\psi(t) = 1.$$

D'autre part, on a

$$\Psi(1) = \frac{1}{3-\varphi(1)} = \frac{1}{3-4} = -1.$$

2pts

En conclusion Ψ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \Psi'(t) + \left(\frac{1}{t} + 6t\right)\Psi(t) = 1, \quad t>0 \\ \Psi(1) = -1. \end{cases} \qquad (5)$$

4.3) On a,

$$\Psi'(t) + \left(\frac{1}{t} + 6t\right)\Psi(t) = 1,$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Le facteur intégrant $\mu(t) = t e^{3t^2}$.

Multiplions les deux membres de l'équation différentielle par $t e^{3t^2}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(t e^{3t^2}\Psi(t)\right) = t e^{3t^2}.$$

Ce qui donne

$$t e^{3t^2}\psi(t) - e^{3}\psi(1) = \int_1^t s e^{3s^2}\,ds$$

C'st-à-dire,

$$t e^{3t^2}\psi(t) + e^{3} = \frac{1}{6}\left[e^{3t^2} - e^{3}\right]$$

2pts

C'st-à-dire,

$$\psi(t) = \frac{1}{6t} - \frac{7e^{3(1-t^2)}}{6t}, \quad t>0.$$

4. 4) En déduire la solution φ du problème de Cauchy (4).

Comme,

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\psi(t)} + 3t, \quad t>0.$$

1pt.

Alors

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{6t}{7e^{3(1-t^2)}-1} + 3t}$$