Exercice 1:

On considère l'EDP d'inconnue $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto u(x, y)$ *suivante :*

$$2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y \qquad (E)$$

1. En utilisant le changement de variables $[\![X = x,\ \ Y = x + 2y]\!]$ *déterminer les solutions de* (E).

2. Trouver les solutions u vérifiant $u(1,1) = 0$.

Exercice 2:

1. Résoudre le système différentiel suivant

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}$$

2. En déduire les solutions de l'EDP suivante

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

3. Déterminer les solutions z dont le graphe contient le point $A\left(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\right)$, *et donner explicitement une de ces solutions.*

Exercice 3:

On considère l'EDP d'ordre 2 suivante:

$$e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ye^x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}$$

1. Quel est type de cette EDP?

2. Écrire, sans calcul, sa forme standard.

3. Déterminer ses courbes caractéristiques.

Barème: *Exercice 1: 7 pts* *Exercice 2: 7 pts* *Exercice 3: 6pts*

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

Corrigé

Exercice 1:

On considère l'EDP :

$$2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y \qquad (E)$$

1. En posant $[\![X = x,\ \ Y = x + 2y]\!]$ *résolvons* (E).

Nous avons par la règle des chaines

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} \qquad (\mathbf{1\ pt})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial Y} \qquad (\mathbf{1\ pt})$$

En remplaçant dans l'équation (E) *nous obtenons*

$$2\left(\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y}\right) - 2\frac{\partial u}{\partial Y} = X^2\frac{Y - X}{2} = \frac{1}{2}(X^2Y - X^3)$$

Soit

$$2\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{1}{2}(X^2Y - X^3) \qquad (\mathbf{1\ pt})$$

Cette dernière EDP est d'ordre 1 et ne contient qu'une seule dérivée partielle, elle peut-être regardée comme une EDO d'ordre 1,

$$\frac{du}{dX} = \frac{1}{4}(X^2Y - X^3).$$

$$\frac{du}{dX} = \frac{1}{4}(X^2Y - X^3) \Longrightarrow u(X,Y) = \frac{1}{4}\int (X^2Y - X^3)dX$$

D'où

$$u(X,Y) = \frac{1}{12}X^3Y - \frac{1}{16}X^4 + A(Y) \qquad (\mathbf{1\ pt})$$

où A est une fonction, d'une seule variable, de classe C^1.

En revenant aux variables x et y nous obtenons

$$u(x,y) = \frac{1}{12}x^3(x + 2y) - \frac{1}{16}x^4 + A(x + 2y)$$

$$= \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{6}x^3y + A(x + 2y). \qquad (\mathbf{2\ pts})$$

2. Déterminons les solutions u vérifiant $u(1,1) = 0$.

$$u(1,1) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{48} + \frac{1}{6} + A(2) = 0 \Longrightarrow A(3) = -\frac{3}{16}.$$

Les solutions u vérifiant $u(1,1) = 0$ *sont définies par*

$$u(x,y) = \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{6}x^3y + A(x + 2y)\ \ avec\ \ A(3) = -\frac{3}{16}. \qquad (\mathbf{1\ pt})$$

Exemples: $u(x,y) = \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{6}x^3y - \frac{3}{16}$, $u(x,y) = \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{6}x^3y - \frac{3}{16}e^{x+2y-3}$.

Exercice 2:

1. Résolvons le système différentiel suivant

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

De la première équation

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} \Longrightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Longrightarrow xdx = ydy \Longrightarrow \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2 + c.$$

D'où $x^2 - y^2 = C$. *Une première intégrale première est* $u(x,y,z) = x^2 - y^2$.
De la même manière, de la deuxième équation nous avons la deuxième intégrale première, $v(x,y,z) = y^2 - z^2$. $(\mathbf{2 \times 1}\ \boldsymbol{pt})$
Remarquons que

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 0 & 2y \end{vmatrix} = 4xy. \quad (\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$$

Donc u et v sont fonctionnellement indépendantes dans au moins un ouvert de $\mathbb{R}^3$, *par exemple* $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[\times \mathbb{R}$. $(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$
Les solutions du système donné sont les courbes (γ_{ab}) *intersection des surfaces de* $\mathbb{R}^3$ *d'équations* $x^2 - y^2 = a$, $y^2 - z^2 = b$. $(\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$

2. Solutions de l'EDP suivante

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

Le système caractéristique de cette EDP d'inconnue z est

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} \qquad (\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$$

ayant, d'après la première question, pour intégrales premières u et v.
Les solutions de l'EDP sont données implicitement par

$$F\big(u(x,y,z),\ v(x,y,z)\big) = 0 \quad i.e.\quad F(x^2 - y^2,\ \ y^2 - z^2) = 0, \quad (\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$$

où F est une fonction de deux variables de classe C^1. *Il existe alors une fonction* φ *de classe* C^1 *telle que* $y^2 - z^2 = \varphi(x^2 - y^2)$.
D'où l'en tire

$$z^2(x,y) = y^2 - \varphi(x^2 - y^2). \quad (\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pt})$$

3. Déterminons les solutions z dont le graphe contient le point $A(\sqrt{2},1,\sqrt{2})$.

$$A \text{ est un point du graphe de } z \Leftrightarrow \sqrt{2}^2 = 1 - \varphi\left(\sqrt{2}^2 - 1\right) \Leftrightarrow \varphi(1) = -1.$$

Les solutions z dont le graphe contient le point A sont les fonctions z pour lesquelles $\varphi(1) = -1$. $(\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$
Exemples $(\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$: *Pour* $\varphi(t) = -t$, *nous obtenons*

$$z^2(x,y) = y^2 + x^2 - y^2 = x^2.$$

Pour $\varphi(t) = \cos(\pi t)$, *nous obtenons*

$$z^2(x,y) = y^2 - \cos\big(\pi(x^2 - y^2)\big).$$

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz

Exercice 3:

On considère l'EDP d'ordre 2 suivante:

$$e^{2x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ye^x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}$$

1. Type de cette EDP: Calculons son discriminant

$$\Delta = (ye^x)^2 - e^{2x}y^2 = 0. \quad \mathbf{(1\ pt)}$$

L'EDP est donc parabolique. $\mathbf{(1\ pt)}$

2. La forme standard des EDP paraboliques d'ordre 2 est:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = F\left(\frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}, u, X, Y\right) \quad ou \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = G\left(\frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}, u, X, Y\right). \quad \mathbf{(1\ pt)}$$

3. Déterminons ses courbes caractéristiques: Ses courbes caractéristiques sont solutions de l'EDO suivante,

$$e^{2x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2ye^x\frac{dy}{dx} + y^2 = 0. \quad \mathbf{(1\ pt)}$$

Cette EDO s'écrit sous la forme

$$\left(e^x\frac{dy}{dx} + y\right)^2 = 0$$

Donc

$$e^x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

$$e^x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -e^{-x}dx \Longrightarrow \ln|y| = e^{-x} + k \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

D'où

$$y = C\exp(e^{-x}). \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

Il y a une seule famille de courbes caractéristiques:

$$\psi(x,y) = y\ \exp(-e^{-x}). \quad \mathbf{(0,5\ pt)}$$

ahmed.bensedik@univ-tlemcen.dz