Université de Tlemcen 2022/2023
Faculté des Sciences
L2 Mathématiques
Probabilités

TD n° 4

Exercice 1.

Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilsable et $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une application, posons

$$\sigma_X = \{X^{-1}(A);\ A \subset \mathbb{R}\}.$$

Montrer que σ_X est une tribu sur Ω, elle est appelée la tribu engendrée par X.

Exercice 2.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que les ensembles suivants sont des boréliens :

$$[a, +\infty[,\ ]a, b],\ \{a\},\ ]a, +\infty[,\ ]-\infty, a[,\ [a, b],\ ]a, b[,\ [a, b[.$$

Exercice 3.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition.

— Montrer que $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

— En déduire $\mathbb{P}(a < X < b)$, $\mathbb{P}(a \leq X < b)$ et $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Exercice 4.

Soient $\lambda > 0$, X une v.a.r positive telle que

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \lambda \int_a^b \mathrm{e}^{-\lambda t} dt,$$

pour tout $0 \leq a < b$.

— Calculer F_X la f.r. de X.

— On pose $Y = [X] + 1$, où [x] désigne la partie entière de x. Déterminer $\mathbb{P}(Y = k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.

Soit p la fonction définie par

$$p(x) = c\frac{(x-1)}{n} \qquad \text{si } x \in \{1, 2, ..., n\}.$$

— Déterminer la valeur de c pour que p soit la fonction de masse d'une v. a. r. X.

— Déterminer dans ce cas F_X.

— Calculer $\mathbb{P}(X \leq 3)$, $\mathbb{P}(1 < X \leq 5)$ et $\mathbb{P}(X > n - 2)$.

— Calculer la moyenne de X.

Exercice 6.
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = cxe^{-\frac{x}{2}}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

— Déterminer la valeur de c pour que f soit une fonction de densité d'une variable aléatoire X.
— Calculer la fonction de répartition de X.
— Calculer la moyenne et la variance de X.

Exercice 7.
La durée de vie d'une machine est modélisée par une variable aléatoire X. D'après des études statistiques, on sait que ce type de machine fonctionne encore après 9 ans avec une probabilité 0.1. On propose

$$f(x) = \frac{a}{(x+1)^b}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

Comme fonction de densité pour cette variable aléatoire.
— Déterminer les constantes a et b.
— Calculer la durée moyenne de fonctionnement pour ce type de machine.
— Quelle est la probabilité que cette machine fonctionne encore après 12 ans.

Exercice 8.
Soit X une variable aléatoire discrète de fonction de masse :

$$p_X(k) = \frac{e^{-2}2^k}{4k!}(1+ck), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

— Déterminer c.
— Soient $Y,\ Z$ deux variable aléatoire de Poissons de paramètre 2. Montrer que

$$I\!P(X=k) = \frac{1}{4}I\!P(Y=k) + \frac{3}{4}I\!P(Z=k-1).$$

— En déduire $\mathbb{E}(X)$.