Université de Tlemcen 2022/2023
Faculté des Sciences
L2 Mathématiques
Probabilités

TD n° 3

Exercice 1.

Dans une université 70% sont des garçons. 60% des garçons fument ainsi que 40% des filles. les étudiants sont enregistrés par un numéro d'inscription. Un numéro est tiré au hasard.

(1) Quelle est la probabilité que le numéro tiré corresponde à une personne qui fume ?

(2) Si on sait que le numéro tiré correspond à une personne qui fume, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

Exercice 2.

La ville de Strasbourg contient 82% d'alsaciens et 18% de personnes d'origines non alsaciènnes. 25% des alsaciens parle allemand, 5% de personnes d'origine non alsaciènne parle allemand. Un touriste allemand est en visite à Strasbourg, il demande à un strasbourgeois choisi au hasard de lui indiquer le chemin du parlement européen.

(1) Quelle la probabilité que ce Strasbourgeois parle allemand ?

(2) La personne choisie parle effectivement allemand, quelle est la probabilité quelle soit alsaciènne ?

Exercice 3.

Une école prestigieuse exige de ces candidats de passer un test avant d'accepter leurs candidature. Un bon candidat a 85% de chance de réussir le test alors qu'un candidat faible n'a que 15% de chance de réussir le test. Des études statistiques ont montré qu'il y a en moyenne 40% de bon candidats.

(1) Quelle est la probabilité qu'un candidat choisi au hasard, réussisse le test.

(2) Un candidat a échoué au test, quelle est la probabilité qu'il soit bon.

(3) Quelle est la proportion des bons candidats qui ont réussi au test.

Exercice 4.

Soient A, B deux évènements de Ω. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
— Les évènements A et B sont indépendants.
— Les évènements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

— Les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants.
— Les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exercice 5.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, A, B deux éléments de $\mathcal{F}$. Montrer que

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \Delta B).$$

Soient $A_1, \cdots, A_n, B_1, \cdots, B_n$ des éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant $A_k \subset B_k$ pour $1 \leq k \leq n$. Montrer que

(1)
$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} B_k) - \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{P}(B_k) - \mathbb{P}(A_k)).$$

(2)
$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_k}).$$

Exercice 6.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, $A, B, C \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) > 0$. Montrer que

(1) $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A/B)$.
(2) $\frac{\mathbb{P}(A/(A \cup B))}{\mathbb{P}(B/(A \cup B))} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.
(3) $\mathbb{P}(A \cap B/(B \cup C)) = \mathbb{P}(A \cap B/B)\mathbb{P}(B/(B \cup C))$.
(4) $\mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B/C)\mathbb{P}(C/A) = \mathbb{P}(B/A)\mathbb{P}(C/B)\mathbb{P}(A/C)$.
(5) $\mathbb{P}(B \cap C/A) = \mathbb{P}(C/A)\mathbb{P}(B/(A \cap C))$.