Université de Tlemcen 2022/2023
Faculté des Sciences
L2 Mathématiques
Probabilités

TD n° 2

Exercice 1.
Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, A, B et C des évènements de Ω. En utilisant les opérations $\cap, \cup$ et le passage au complémentaire, exprimer les évènements suivants :
— E_1 : Aucun des évènements A, B et C ne se réalise.
— E_2 : B se réalise mais pas A et C.
— E_3 : Exactement deux évènements se réalisent.
— E_4 : Au moins l'un des évènements se réalise.
— E_5 : Au plus l'un des évènements se réalise.
— E_6 : Exactement un évènement se réalise.

Exercice 2.
Soient Ω un espace échantillon, $\mathcal{A}$ une algèbre sur Ω et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω.
1. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ des éléments de $\mathcal{A}$, alors
$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}.$$
2. Montrer que si $\{A_1, A_2, ...,\}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors
$$\bigcap_{k\geq 1} A_k \in \mathcal{F}.$$

Exercice 3.
1. Soient Ω un espace échantillon, $\mathcal{A}_1,\ \mathcal{A}_2$ deux algèbres sur Ω et $\mathcal{F}_1,\ \mathcal{F}_2$ deux tribus sur Ω.
(1) Montrer que $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ est encore une algèbre.
(2)
(3) Montrer que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est encore une tribu.
2. Pour $A \in \Omega$ on rappelle que la **tribu engendrée** par A, notée $\sigma(A)$ est donnée par
$$\sigma(A) := \{\emptyset,\ \Omega,\ A,\ \bar{A}\}.$$
(1) Vérifier que $\sigma(A)$ est bien une tribu.
(2) Montrer par un choix convenable de $\Omega,\ A$ et B que $\sigma(A) \cup \sigma(B)$ n'est pas nécessairement une tribu.

Exercice 4. Posons

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ card(A) \text{ est fini où } card(\overline{A}) \text{ est fini}\}.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$, mais pas une tribu.

Exercice 5.
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, I\!\!P)$ un espace de probabilité, $A,\ B,\ C$ et D des événements de Ω avec $C \subset D$.

(1) Montrer que $I\!\!P(\overline{A}) = 1 - I\!\!P(A)$.
(2) Trouver une equation entre $I\!\!P(C),\ I\!\!P(D)$ et $I\!\!P(D/C)$ (il n'est pas interdit de dessiner).
(3) En déduire que $I\!\!P(C) \leq I\!\!P(D)$ ($I\!\!P$ est croissante).
(4) Montrer que $I\!\!P(A \cup B) = I\!\!P(A) + I\!\!P(B) - I\!\!P(A \cap B)$.

Exercice 6.
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, I\!\!P)$ un espace de probabilités, $A, B \in \mathcal{F}$ avec $I\!\!P(A) = 1/3,\ I\!\!P(B) = 1/4$ et $I\!\!P(A \cap B) = 1/6$. Calculer

$$I\!\!P(\overline{A}),\ I\!\!P(\overline{A} \cup B),\ I\!\!P(A \cup \overline{B}),\ I\!\!P(A \cap \overline{B}),\ I\!\!P(\overline{A} \cup \overline{B}).$$

Exercice 7.
On jette 3 dés équilibrés et on note les résultats de ces trois jets : a, b et c.
i. Déterminer Ω et $card(\Omega)$.
ii. On forme alors l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$. Calculer les probabilités des évènements suivants :
A : "Les racines de l'équation (E) sont réelles".
B : "Les racines de l'équation (E) sont complexes".

Exercice 8.
Dans une tombola il y a 120 tickets pour gagner 3 lots différents, pour chaque lot il y a 4 cadeaux et donc 4 tickets gagnants. Une personne achète 3 tickets.
1. Quelle est la probabilité que cette personne gagne un seul cadeau ?
2. Quelle est la probabilité que cette personne gagne au moins un cadeau ?
3. Quelle est la probabilité que cette personne un cadeau de tois lots différents ?