Université de Tlemcen
Faculté des Sciences 2022/2023
Département de Mathématiques
L2 Mathématiques

Examen de rattrapage d'analyse numérique 2
Corrigé

Exercice 1
Répondre par vrai ou faux aux questions en justifiant votre réponse.
Toute réponse non argumentée n'est pas prise en considération.

1. Si A et B sont deux matrices inversibles alors $cond(AB) \leq cond(A)cond(B)$.
Vrai, *en effet* $cond(AB) = \|AB\| \left\|(AB)^{-1}\right\| = \|AB\| \|B^{-1}A^{-1}\| \leq \|A\| \|B\| \|B^{-1}\| \|A^{-1}\|$.
Il s'en suit $cond(AB) \leq cond(A)cond(B)$.

2. $\forall \alpha \in [2, +\infty[$, la matrice triangulaire supérieure de la décomposition de Cholesky de $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2-\alpha^2} \end{pmatrix}$.
Faux *Si* $\alpha \in [2, +\infty[$, *alors* $\det(A) = 2 - \alpha^2 < 0$ *et donc* A *n'est pas définie positive,* elle *n'admet pas de décomposition de Cholesky.*

3. Soit A une matrice symétrique définie positive. L'utilisation de la stratégie du pivot dans la méthode d'élimination de Gauss est nécessaire.
Faux *L'utilisation de la stratégie du pivot n'est pas nécessaire puisque les mineurs principaux sont dans ce cas tous strictement positifs donc différents de zéro. Ceci assure qu'à chaque étape d'élimination de Gauss le pivot est non nul. Remarquons qu'une matrice symétrique et définie positive a des éléments diagonaux qui sont relativement grands ce qui rendra le pivotage inutile.*

4. On propose de résoudre le problème $Ax = b$ par la méthode itérative $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + b$,avec $B = I - A$.
La méthode proposée est convergente pour le système:
$$\begin{cases} 0.5x - 0.4y = 1 \\ -0.1x + 1.3y = 2 \end{cases}$$
Vrai $B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & -0.3 \end{pmatrix}$, *On constate que* $\rho(B) < \|B\|_1 = 0.7 < 1$ *et donc la méthode proposée est convergente.*

5. Le coût de calcul de la résolution du système $Ux = b$, avec U matrice triangulaire supérieure de taille $n \times n$ est:
n divisions et $\frac{n(n-1)}{2}$ additions et $\frac{n(n-1)}{2}$ multiplications.
Vrai
La remontée nécessite :
n divisions
$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ *additions*
et $1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ *multiplications.*

Exercice 2
1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, montrer que si $v = x + \|x\| e_k$ est non nul alors la transformation de Householder H_v appliquée à x produit un vecteur dont les tous ses coefficients sont nuls sauf la kième composante.

2. Effectuer la factorisation QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Solution

1.

$$\begin{aligned} H_v x &= \left(I - \frac{2vv^T}{v^T v} \right) x \\ &= x - \frac{2vv^T}{v^T v} x \\ &= x - 2\frac{v^T x}{v^T v} v \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} v^T x &= \left(x + \|x\| e_k\right)^T x \\ &= \|x\|^2 + \|x\| x_k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v^T v &= \left(x + \|x\| e_k\right)^T \left(x + \|x\| e_k\right) \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|x\| x_k \end{aligned}$$

donc

$$\frac{2v^T x}{v^T v} = 1$$

ce qui implique

$$H_v x = x - v = \|x\| e_k.$$

2.

1ère étape:

On pose $a_1 = (-3, 4, 0)^T$

$$\|a_1\| = 5$$

$$v_1 = a_1 - \|a_1\| e_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= I - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}^T = I - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 64 & -32 & 0 \\ -32 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 A &= H_1 A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Posons $a_2 = (-4, 3)$

$$\|a_2\| = 5$$

$$v_1 = a_2 - \|a_2\| \, e_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
H_2 &= I - \frac{2}{90} \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 81 & -27 \\ -27 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 Q_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = R
\end{aligned}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Exercice 3

On considère le système linéaire $Ax = b$ où,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

On veut résoudre $Ax = b$ par une méthode directe.

1. Quelle factorisation de la matrice envisageriez-vous? Justifiez votre réponse.
2. Factoriser la matrice A, puis calculez la solution du système.

Solution
1. *Si $\varepsilon = 0$ la matrice A est symétrique, mais elle n'est pas définie positive; donc on ne peut pas calculer la factorisation de Cholesky. On utilisera la méthode d'élimination de Gauss avec changement de pivot, puisque $a_{11} = 0$.*
2. *On peut considérer la matrice de permutation*
$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
On peut voir facilement que $PA = LU$ avec
$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2/5 & 1 \end{pmatrix}$; $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 11/5 \end{pmatrix}$.
Il s'en suit la résolution $PAx = Pb \Longleftrightarrow LU = Pb$
$\Longleftrightarrow \begin{cases} Ly = Pb \\ Ux = y \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 17/5 \end{pmatrix} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} -14/11 \\ -1/11 \\ 17/11 \end{pmatrix}$.

Exercice 4
On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} ty' - y = \dfrac{t^2}{t-1} & \quad 2 \leq t \leq 3 \\ y(2) = -1 \end{cases}$$

1. Montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème précédent.
2. En utilisant la méthode d'Euler avec un pas $h = .5$, quelle est la valeur approximative de $y(3)$?
3. Donner une borne de l'erreur commise au point $t = 3$, en utilisant 10 évaluations de la méthode d'Euler.

Solution
1. On pose

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad [2,3] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \quad &\mapsto \quad f(t,y) = \frac{1}{t}\left(y + \frac{t^2}{t-1}\right) \end{aligned}$$

La fonction f est continue sur $[2,3] \times \mathbb{R}$.
De plus

$$\begin{aligned} |f(t,y) - f(t,z)| &= \left| \frac{1}{t}\left(y + \frac{t^2}{t-1}\right) - \frac{1}{t}\left(z + \frac{t^2}{t-1}\right) \right| \\ &= \frac{1}{t}|y - z| \\ &\leq \frac{1}{2}|y - z|. \end{aligned}$$

$$L = \frac{1}{2}.$$

Il s'en suit que la fonction f est continue et lipschitzienne par rapport à y uniformement par rapport à t. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité de la solution du problème posé.
2. La formule d'Euler est pour $t_n = 2 + nh, n = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_0 &= -1 \end{aligned}$$

donc

$$y\,(2.5) \approx y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = -1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{2^2}{2-1}\right) = -\frac{1}{4}$$

et

$$y\,(3) \approx y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{4} + \frac{5^2}{4\left(\frac{5}{2}-1\right)}\right) = \frac{8}{15}.$$

3.

$$|y\,(3) - y_2| \leq \frac{Mh}{2L}\left(e^{L(3-2)} - 1\right)$$

La solution exacte est

$$y\,(t) = t \ln(t-1) - \frac{1}{2}t.$$

Ce qui implique

$$y'(t) = \ln(t-1) + \frac{t}{t-1} - \frac{1}{2}$$

et

$$y''(t) = \frac{t-2}{(t-1)^2},$$

$$y'''(t) = \frac{3-t}{(t-1)^3} > 0.$$

Donc

$$M = \frac{1}{4}.$$

$$|y\,(3) - y_2| \leq \frac{1}{32}\left(e^{0.5} - 1\right).$$