Université de Tlemcen. le 14/06/2023.
L2 Mathématiques.
Module : Analyse complexe.

Epreuve de rattrapage. durée : 1h30

Exercice n° 1

Calculer $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et C est une courbe fermée simple dans les cas suivants :

1/ z_0 est à l'extérieur de C.

2/ z_0 est à l'intérieur de C (distinguer le cas $n=1$ et $n \geq 2$)

Exercice n° 2

Déterminer le résidu à chacun des pôles de $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+1)}$

Exercice n° 3

1/ Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, montrer que si z_0 est un pôle simple, alors

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

2/ En déduire $\operatorname{Res}\left(\frac{z-1}{z^3+1}, -1\right)$

Exercice n° 4 :

Calculer :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} \quad \text{et} \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Exercice n° 1 : 5pts ; Exercice n° 2 : 4pts ; Exercice n° 3 : 5pts ; Exercice n° 4 : 6pts

Bon Courage

Université de Tlemcen.
L2 Mathématiques
Module : Analyse complexe

Corrigé de l'épreuve de rattrapage.

Exercice n° 1

Calculer $$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz$$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et C est une courbe fermée simple. dans les cas suivants :

1/ z_0 est à l'extérieur de C.

Solution :
Si z_0 est à l'extérieur de C, la fonction $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ est holomorphe dans C, ainsi que dans son intérieur

$$\xrightarrow{\text{Théorème de Cauchy}} \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = 0$$

2/ z_0 est à l'intérieur de C, distinguer le cas $n=1$ et $n \geq 2$.

Solution Si z_0 est à l'intérieur de C, choisissons $r>0$ tel que le disque fermé $\{|z-z_0| \leq r\}$ soit à l'intérieur de C.
Considérons $C_r = \{z \in \mathbb{C} / |z-z_0| = r\}$ le cercle de centre z_0 et de rayon r, d'après une conséquence du théorème de Cauchy on a

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = \oint_{C_r} \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz$$

M. Mebkhout

C_r est paramétré par $\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\Longrightarrow$

* Si $n = 1$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = \oint_{C_r} \frac{1}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it}}{r e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

* Si $n \geq 2$

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it}}{(r e^{it})^n} dt = \int_0^{2\pi} \frac{i e^{-i(n-1)t}}{r^{n-1}} dt$$

$$= \left[\frac{-e^{-i(n-1)t}}{(n-1) r^{n-1}} \right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{(n-1) r^{n-1}} \left(e^{-i(n-1)2\pi} - 1 \right) = 0$$

Exercice n°2

Déterminer le résidu à chacun des pôles de $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2 (z+1)}$

Solution

La fonction f admet un pôle simple en -1 et un pôle double en 1.

$\Longrightarrow$:

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z \to -1} (z-(-1)) f(z) = \lim_{z \to -1} (z+1) \frac{z}{(z-1)^2 (z+1)}$$

$$= \lim_{z \to -1} \frac{z}{(z-1)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 f(z) \right] = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z+1} \right)$$

$$= \lim_{z \to 1} \left[\frac{(z+1) - z}{(z+1)^2} \right] = \frac{1}{4}$$

M. Hebkhout

Exercice n° 3

1/ Soit $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, montrer que si z_0 est un pôle simple de f alors $Res(f,z_0)=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

Solution

z_0 pôle simple de f $\Rightarrow$ z_0 racine simple de $Q(z)$.

$\Rightarrow$ $Q(z_0)=0$ et $Q'(z_0)\neq 0$.

En effet montrons.

$$\underbrace{[z_0 \text{ racine simple de } Q(z)]}_{H} \Longrightarrow \underbrace{[Q(z_0)=0 \text{ et } Q'(z_0)\neq 0]}_{C}$$

$$H \Longrightarrow C.$$

Raisonnons par l'absurde, supposons donc H et $\overline{C}$

$\Longrightarrow$ z_0 racine simple de $Q(z)$ et $[Q(z_0)\neq 0$ ou $Q'(z)=0]$

$\Longrightarrow$ z_0 racine simple de $Q(z)$ et $Q'(z_0)\neq 0$

$\Longrightarrow$ $Q(z)=(z-z_0)S(z)$ avec $S(z_0)\neq 0$ et $Q'(z_0)=0$

$\xRightarrow{Q'(z)=S(z)+(z-z_0)S'(z)}$ $Q'(z_0)=S(z_0)$ $\Longrightarrow$ $S(z_0)=0$ contradiction

Conclusion: $Q(z_0)=0$ et $Q'(z_0)=0$

$$\Longrightarrow Res(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{0}{0}$$

<u>R. Hôpital</u>

$$\lim_{z\to z_0}\frac{[(z-z_0)P(z)]'}{Q'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)+(z-z_0)P'(z)}{Q'(z)}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

2/ En déduire $Res\left(\frac{z-1}{z^3+1},-1\right)$

Solution : Les racines de z^3+1 sont -1 ; $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}$, donc (-1) est un pôle simple de $\frac{z-1}{z^3+1}$ $\xRightarrow{1/}$ $Res\left(\frac{z-1}{z^3+1},-1\right)=\frac{P(-1)}{Q'(-1)}=-\frac{2}{3}$ (Après calculs).

M.Mebkhout

Exercice n° 4

Calculez :

1/ $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

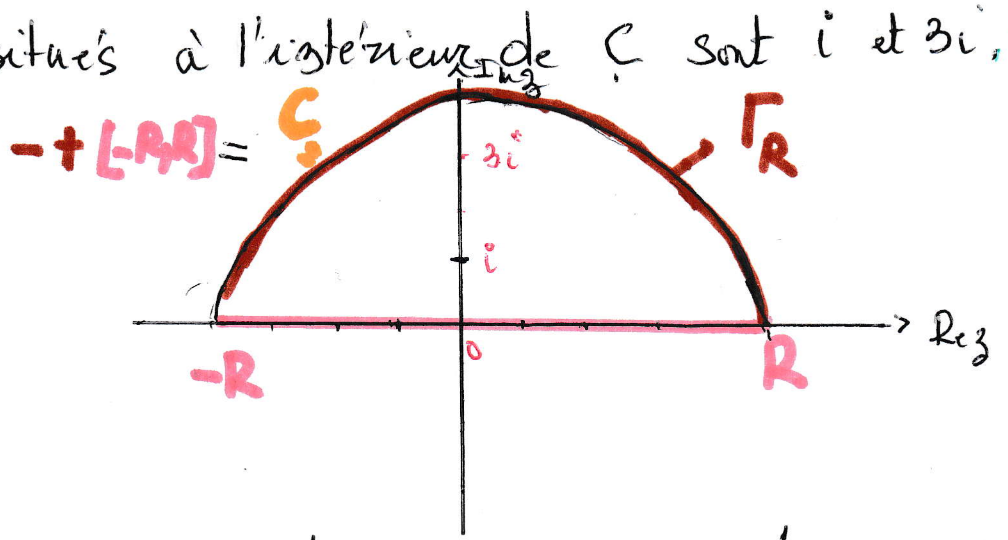
Solution :

Faisons appel à l'analyse complexe et considérons

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)}$$ où C désigne le contour fermé

formé du segment $[-R, R]$ et le demi cercle Γ_R

Les pôles situés à l'intérieur de C sont i et $3i$, ils sont sim



$$\text{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)(z^2+9)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z^2+9)} = \frac{1}{16i}$$

De même on trouve $\text{Res}(f, 3i) = -\dfrac{1}{48i}$.

En utilisant le théorème des résidus on aura

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i\left(\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

M. Mebkhout

D'autre part

$$\frac{\pi}{12} = \int_C \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)}$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle R \to +\infty} \qquad\qquad \Big\downarrow {\scriptstyle R \to +\infty} \qquad\qquad \Big\downarrow {\scriptstyle R \to +\infty}$$

$$\frac{\pi}{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} + 0$$

$= 1$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \frac{\pi}{12}$$

Démonstration de 1

La paramétrisation de Γ_R est $\gamma(t) = Re^{it}$ $t \in [0, \pi]$.

$$\int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = \int_0^{\pi} \frac{iRe^{it}}{(Re^{it})^4 + 10(Re^{it})^2 + 9}\, dt.$$

$$= i \int_0^{\pi} \frac{1}{(Re^{it})^3 + 10Re^{it} + \frac{9}{Re^{it}}}\, dt \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

2/ $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dx$

Solution

Considérons $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(1+z^2)^3}$ où C désigne le même contour utilisé dans I.

Le pôle situé à l'intérieur de C est i, il est d'ordre 3.

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{2} \lim_{z \to i} \frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3 \frac{1}{(z^2+1)^3}\right] = \frac{3}{16i} \text{ (Après Calculs).}$$

M. Mekhout

En utilisant le théorème des résidus on aura :

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+1)^3} = 2\pi i \frac{3}{16i} = \frac{3\pi}{8}$$

D'autre part $\frac{3\pi}{8} = \int_C \frac{dz}{(z^2+1)^3} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^3} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3}$.

En passant à la limite quand $R \to +\infty$ et en utilisant la même methode utilisée dans l calcul de I, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

M. Mekkhout