Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

$2^{ème}$ année MATH- Semestre 2

Examen de rattrapage : Analyse 4

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (6 Pts)

Soient α, β et γ trois constantes positives et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(|x|+|y|)^\gamma} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Pour quelles valeurs de α, β et γ, la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

2) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et calculer leurs valeurs.

3) Trouver une condition (qui dépend des paramètres α, β, γ) pour que f soit différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2. (6.5 Pts)

Soient g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $g_0 := g(x_0, y_0)$ et $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = y - y_0 + \frac{1}{2}\left(g(x,y) + g_0\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right).$$

1) Montrer qu'au voisinage de (x_0, y_0), l'équation $F(x,y) = 0$ équivaut à $y = \phi(x)$ où ϕ est une fonction de classe C^1.

2) Exprimer ϕ' à l'aide de g et de ses dérivées partielles et en déduire $\phi'(x_0)$.

3) On suppose ici que $g(x;y) = \alpha xy$, $\alpha > 0$.
Calculer

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x, \phi(x)) - g_0}{x - x_0}$$

Exercice 3. (7.5 Pts)

I) Soit D le domaine suivant

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad y \leq x \quad \text{et} \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

1) Représenter le domaine D.
2) Calculer l'aire du domaine D.
3) Calculer l'intégrale double suivante

$$I = \iint_D (3x^2 + 4y^2)\,dx\,dy$$

II) Calculer le volume du domaine Δ limité par le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et le plan d'équation $z = h, \quad h > 0$.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

$2^{\text{ème}}$ année M.I - Semestre 2

Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 4

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (6 Pts)

1) On remarque que f est continue en $(0,0)$ si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$ **(0.25 Pt)** Alors, on a

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)| &= \frac{|x|^{\alpha}|y|^{\beta}}{(|x|+|y|)^{\gamma}}\\ &\leq \frac{(|x|+|y|)^{\alpha}(|x|+|y|)^{\beta}}{(|x|+|y|)^{\gamma}}\\ &= (|x|+|y|)^{\alpha+\beta-\gamma}. \quad \textbf{(1.5Pt)}\end{aligned}$$

Le terme $(|x|+|y|)^{\alpha+\beta-\gamma}\to 0$ quand $(x,y)\to(0,0)$ si et seulement si $\alpha+\beta-\gamma>0$

Ainsi, f est continue en $(0,0)$ si $\alpha+\beta>\gamma.$ **(0.5 Pt)**

2) Par définition, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0 \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0 \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

3) On remarque que l'existence de la différentielle en $(0,0)$ implique que

$$df_{(0,0)}(h_1,h_2)=h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0. \quad \textbf{(0.25Pt)}$$

Ainsi, f est différentiable en $(0,0)$ si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-df_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}=0. \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

En choisissant $\|(h_1,h_2)\|=|h_1|+|h_2|$, nous remarquons que

$$\frac{f(h_1,h_2)-f(0,0)-df_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}=\frac{|h_1|^{\alpha}|h_2|^{\beta}}{(|h_1|+|h_2|)^{\gamma+1}}$$

$$\leq \frac{(|h_1|+|h_2|)^{\alpha}(|h_1|+|h_2|)^{\beta}}{(|h_1|+|h_2|)^{\gamma+1}}=(|h_1|+|h_2|)^{\alpha+\beta-\gamma-1}. \quad \textbf{(1.5Pts)}$$

Donc, f est différentiable en $(0,0)$ si $\alpha+\beta>\gamma+1.$ **(0.5 Pt)**

Exercice 2. (6 Pts)

1) Remarquons que $F(x_0,y_0)=0$ pour $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}.$ **(0.25 Pt)**

D'autre part,

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=1+\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}). \quad \textbf{(0.25Pt)}$$

Donc, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=1\neq 0.$ **(0.25 Pt)**

Par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V de x_0 et une fonction $\phi: V\to\mathbb{R}$

vérifiant $y_0 = \phi(x_0)$ et $F(x, \phi(x)) = 0, \quad \forall x \in V.$ **(0.25 Pt)**
2) En dérivant par rapport à x l'équation $F(x, \phi(x)) = 0$, on obtient

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \phi(x)))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \phi(x))}. \quad (\mathbf{1Pt})$$

On remarque que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \phi(x)) = -\frac{1}{2x^2}\left(g(x, \phi(x)) + g_0\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x, \phi(x))\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right). \quad (\mathbf{1Pt})$$

Ainsi,

$$\phi'(x) = \frac{\frac{1}{2x^2}\left(g(x, \phi(x)) + g_0\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x}(x, \phi(x))\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)}{1 + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y}(x, \phi(x))\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)}. \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

Ainsi,

$$\phi'(x_0) = \frac{g_0}{x_0^2.} \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

3) On remarque que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x, \phi(x)) - g_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{dg}{dx}(x, \phi(x)) \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, \phi(x_0)) + \phi'(x_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, \phi(x_0)). \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

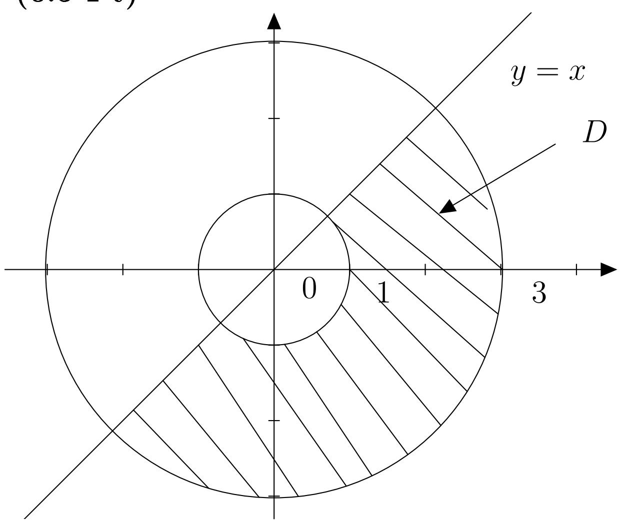
Pour, $g(x, y) = \alpha xy$, on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \alpha y$ et $\frac{\partial g}{\partial y} = \alpha x.$ **(0.25 Pt)**
Donc,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x, \phi(x)) - g_0}{x - x_0} = \alpha\phi(x_0) + \alpha\phi'(x_0)x_0. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

D'autre part, on sait que $g(x_0, y_0) = g_0 \Leftrightarrow g(x_0, \phi(x_0)) = g_0$, ceci implique que $\alpha x_0\phi(x_0) = g_0$. **(0.25 Pt)**
Ainsi,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x, \phi(x)) - g_0}{x - x_0} = \alpha(\frac{g_0}{\alpha x_0}) + \alpha\frac{g_0}{x_0^2}x_0 = (1 + \alpha)\frac{g_0}{x_0}. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

Exercice 3. (8 Pts)
I) 1) Le domaine D est **(0.5 Pt)**



2) L'aire du domaine D est donné par

$$Aire(D) = \iint_D dxdy. \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

Par les coordonées polaires, on a

$$Aire(D) = \iint_{D}' rdrd\theta \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

avec $D' = \{(r,\theta), / \quad r \in [1,3], \quad \theta \in [-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]\}$. $\quad$ **(1 Pt)**
Donc,

$$Aire(D) = \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \int_{1}^{3} rdrd\theta = \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^3 [\theta]_{-3\pi/4}^{\pi/4} = 4\pi \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

3) Le calcul de l'intégrale double devient simple par les coordonnées polaires. On a

$$I = \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \int_{1}^{3} (3r^2\cos^2(\theta) + 4r^2\sin^2(\theta))rdrd\theta \quad (\mathbf{0.5Pt})$$

$$= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \int_{1}^{3} (3+\sin^2(\theta))r^3drd\theta = \left(\int_1^3 r^3dr\right)\left(\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\left(3 + \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta\right)$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^3 \left[\frac{7}{2}\theta - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-3\pi/4}^{\pi/4} = 70\pi \quad (\mathbf{1.5Pts})$$

II) On sait que le volume de Δ est donné par

$$Volume(\Delta) = \iiint_{\Delta} dxdydz \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

En utilisant les coordonées cylindriques $(x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta), z = z,)$ $\quad$ **(0.25 Pt)** on obtient que $\Delta = [0, \sqrt{z}] \times [0, 2\pi] \times [0, h]$ $\quad$ **(0.5 Pt)** Ainsi,

$$Volume(\Delta) = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} rdrd\theta dz = 2\pi \int_0^h \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z}} dz$$

$$= \pi \int_0^h zdz = \pi\frac{h^2}{2}. \quad (\mathbf{1Pt})$$