Rattrapage Algèbre 4 13-06-2023 Département de Maths

Durée : 01H-30'-00'' Fac. Des Sciences-UABB-Tlemcen

Toute réponse donnée doit être détaillée et justifier.

Exercice 1 : (Rendre une copie propre + Ecrire chaque étape clairement)

1) Donner les expressions de deux polynômes P1 et P2 de $\mathbb{R}_2(x)$ dont les composantes, dans la base canonique, sont représentées dans $\mathbb{R}^3$ par les vecteurs v1 = (1, 1, 0) et v2 = (1, 0, 1).

2) Soit P3 dans $\mathbb{R}_2(x)$ tel que P3(x) = 1. Montrer que (P1, P2, P3) est une base de $\mathbb{R}_2(x)$, puis trouver sa base duale en utilisant la matrice de passage de la base canonique à la base (P1, P2, P3).

3) Retrouver la base duale de (P1, P2, P3) en posant que pour tout P dans $\mathbb{R}_2(x)$, $P(x) = \alpha\, P1(x) + \beta\, P2(x) + \gamma\, P3(x)$, α, β, γ des réels. **Justifier**. 6 points

---

Exercice 2 : (Rendre une copie propre + Ecrire chaque étape clairement)

Soit q_m la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q_m(x, y, z) = mx^2 - 6y^2 \quad \text{avec } m \text{ un paramètre réel.}$$

1) Discuter selon m la réduction de q_m, son rang et sa signature.
2) Donner donc le signe de q_m et dites si q_m est définie ou pas. **Justifier**.
3) Selon vous, existent-ils des vecteurs isotropes pour q_m? **Justifier**. 7 points

---

Exercice 3 : (Rendre une copie propre + Ecrire chaque étape clairement)

Soit (x, y, z) un vecteur de $E = \mathbb{R}^3$.

On note par F1 le sous espace vectoriel de E donné par l'équation y=x et par F2 le sous espace vectoriel de E donné par l'équation z=0.

1) Déterminer une base de chaque sous espace F1, F2 et F1 ∩ F2.
2) Soit v= (1, 0, 1) un vecteur de E. Déterminer la projection orthogonale p de v sur le sous espace vectoriel F1 ∩ F2. Faites proprement une figure.
3) Que représente F1 ∩ F2 pour p ? Déduire $Ker(i_d - p)$ et Ker(p). 7 points

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة أبوبكر بلقايد - تلمسان - كلية العلوم
UNIVERSITÉ ABOU-BAKR BELKAID - TLEMCEN - FACULTÉ DES SCIENCES

Année Universitaire .... السنة الدراسية   Nom .... اللقب
Examen .... الإختبار   Prénom .... الإسم
Date .... التاريخ   Né (e) le .... تاريخ الإزدياد
Signature de l'Etudiant .... إمضاء الطالب   N° Carte d'Etudiant .... رقم بطاقة الطالب

Observations   ملاحظات

Note   النقطة
/20

Corrigé Rattrapage Algèbre 4   13/6/23

6pts **Exo1** Dans $\mathbb{R}_2[x]$

1) $P_1(x) = 1+x$ (0,5) , $P_2(x) = 1+x^2$ (0,5)
$v_1 = (1,1,0)$; $v_2 = (1,0,1)$

2) $P_3(x) = 1$
$v_3 = (1,0,0)$

• (P_1, P_2, P_3) libre $\Leftrightarrow \det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Leftrightarrow (P_1, P_2, P_3) \text{ libre}$$ (0,5)

or $\operatorname{card}\{P_1, P_2, P_3\} = 3 = \dim \mathbb{R}_2(x)$

donc (P_1, P_2, P_3) base de $\mathbb{R}_2(x)$.

• Base duale de (P_1, P_2, P_3)

Soit P la matrice de passage de $(1, x, x^2)$ à (P_1, P_2, P_3)

$$P = \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) & & & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \end{array} \Rightarrow P^{-1} \overset{0,5}{=} \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a : $(1, x, x^2) \xrightarrow{P} (P_1, P_2, P_3)$

$(1^*, x^*, x^{2*}) \xrightarrow{{}^tP^{-1}} (P_1^*, P_2^*, P_3^*)$

$${}^tP^{-1} \overset{0,5}{=} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} P_1^* & P_2^* & P_3^* \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1^* \\ x^* \\ x^{2*} \end{array} \end{array}$$

(P_1^*, P_2^*, P_3^*) base duale de (P_1, P_2, P_3) :

$P_1^*(x) = x$ 0,5 , $P_2^*(x) = x^2$ 0,5 , $P_3^*(x) = 1 - x - x^2$ 0,5

$v_1^* = (0,1,0)$, $v_2^* = (0,0,1)$, $v_3^* = (1,-1,-1)$

3) Soit $P \in \mathbb{R}_2(x)$ / $P(x) = \alpha P_1(x) + \beta P_2(x) + \gamma P_3(x)$

On pose $P(x) = a + bx + cx^2$.

On a donc : $(a, b, c) \overset{0,5}{=} \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ ⊛

0,5 $\Rightarrow \begin{cases} v_1^*(a,b,c) = \alpha v_1^*(v_1) + \beta v_1^*(v_2) + \gamma v_1^*(v_3) = \alpha \\ v_2^*(a,b,c) = \alpha v_2^*(v_1) + \beta v_2^*(v_2) + \gamma v_2^*(v_3) = \beta \\ v_3^*(a,b,c) = \alpha v_3^*(v_1) + \beta v_3^*(v_2) + \gamma v_3^*(v_3) = \gamma \end{cases}$

(*) $\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = a \\ \alpha = b \\ \beta = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = b \\ \beta = c \\ \gamma = a-b-c \end{cases}$ (0,5)

Donc $\begin{cases} v_1^*(a,b,c) = b \Rightarrow v_1^* = (0,1,0) \\ v_2^*(a,b,c) = c \Rightarrow v_2^* = (0,0,1) \\ v_3^*(a,b,c) = a-b-c \Rightarrow v_3^* = (1,-1,-1) \end{cases}$ (0,5)

D'où $P_1^*(x) = x$, $P_2^*(x) = x^2$, $P_3^*(x) = 1-x-x^2$.

Exo2 Dans $\mathbb{R}^3$. 7pts

1) $q_m(x,y,z) = mx^2 - 6y^2$

$= m\,l_1^2(x,y,z) - 6\,l_2^2(x,y,z)$ (0,5)

avec $l_1(x,y,z) = x$ et $l_2(x,y,z) = y$

$\Downarrow$ (0,5) $\qquad\qquad \Downarrow$ (0,5)

$l_1 = (1,0,0) \qquad l_2 = (0,1,0)$

$\{l_1, l_2\}$ libre (0,5) car : l_1 et l_2 sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

$l_1 \cdot l_2 = 0$

- si $m \neq 0$ alors il y a 2 formes lin. l_1 et $l_2 \Rightarrow rg(q_m) = 2$ (0,5)
  - (0,5) si $m < 0$ alors signature$(q_m) = (0,2)$
  - (0,5) si $m > 0$ alors signature$(q_m) = (1,1)$
- si $m = 0$ alors $q_0(x,y,z) = -6y^2 = -6\,l_2^2(x,y,z)$

  Il y a 1 forme lin. $l_2 \Rightarrow rg(q_0) = 1$ (0,5)

  (0,5) signature$(q_0) = (0,1)$

2) • si $m \neq 0$ (0,5) • si $m > 0$ alors q_m change de signe
  (0,5) • si $m < 0$ alors q_m est négative.
- si $m = 0$ alors $q_0(x,y,z) = -6y^2$, q_0 négative (0,5)
- $\forall m \in \mathbb{R}$, q_m n'est pas définie car $q_m(0,0,1) = 0$ et $(0,0,1) \neq 0$. (0,5)

3) $M(q_m) = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale.

0,5 Le fait qu'il y a un vect colonne nul alors il existe un vecteur isotrope.

- $m \neq 0$ c'est le vect w de la base q_m-orthogonale (u, v, w)
- $m = 0$ ce sont les vect u et w " " q_0-orthogonale (u, v, w)

Exo 3 Dans $\mathbb{R}^3$

7 pts 1)

- F_1 est un plan de $\mathbb{R}^3$,

1 $(x,y,z) \in F_1 \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,x,z)$

Donc $F_1 = Vect\left((1,1,0),(0,0,1)\right)$

- F_2 est un plan de $\mathbb{R}^3$,

1 $(x,y,z) \in F_2 \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,y,0)$

Donc $F_2 = Vect\left((1,0,0),(0,1,0)\right)$

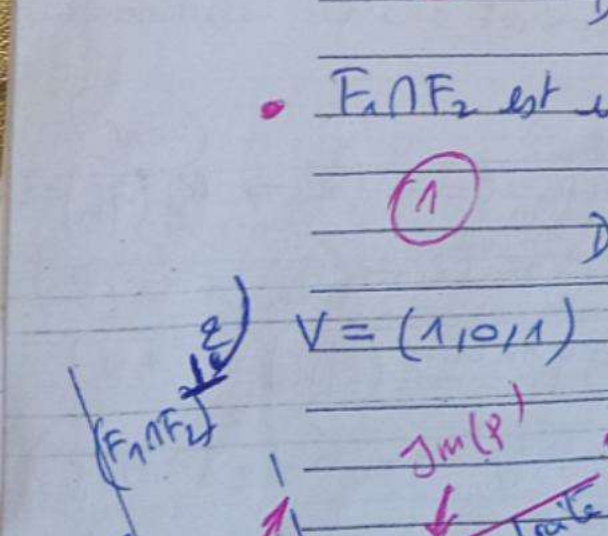
- $F_1 \cap F_2$ est une droite de $\mathbb{R}^3$,

1 $(x,y,z) \in F_1 \cap F_2 \Leftrightarrow (x,y,z) = (x,x,0)$

Donc $F_1 \cap F_2 = Vect(1,1,0) = Vect(W)$

2) $V = (1,0,1)$ $\quad p_{F_1 \cap F_2}(V) = \left\langle V, \frac{W}{\|W\|} \right\rangle \frac{W}{\|W\|}$ 1

$= \frac{1}{2} \left\langle (1,0,1),(1,1,0) \right\rangle (1,1,0) = \frac{1}{2}(1,1,0)$



3) $F_1 \cap F_2 = Vect(1,1,0) = Jm\left(p_{F_1 \cap F_2}\right)$ 1 1

$Ker\left(id - p_{F_1 \cap F_2}\right) = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 / u - p_{F_1 \cap F_2}(u) = 0 \right\} = F_1 \cap F_2$

$Ker\left(p_{F_1 \cap F_2}\right) = (F_1 \cap F_2)^\perp$ = le plan $\perp F_1 \cap F_2$

L'équation du plan est $x + y = 0$ 1

FIN