Mercredi, 14 Juin 2023.

Univesrité Aboubekr Belkaïd de Tlemcen
Faculté des sciences
Departement de mathématiques.

Niveau: L2
Module: Géométrie
Année universitaire: 2022-2023.

Examen de rattrapage.
Durée: 90 minutes.

Exercice 1. (4 points)
Soit $(E, \vec{E})$ un plan affine avec repère cartésien $\mathcal{A} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On considère deux point X et Y de E, donner une représenation paramétrique de la droite passant par les deux points X et Y dans le repère $\mathcal{A}$.

Exercice 2. (4 points)
Donner une paramétrisation de la courbe γ de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{cases} (x-1)^2 + z^2 = 4, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \\ y + x = 2. \end{cases}$$

Exercice 3. (4 points)
Soit γ la courbe de $\mathbb{R}^3$ donnée par la paramétristation

$$\gamma(t) = (2\cos(t) + 1, -2\cos(t) + 1, 2\sin(t)), t \in \mathbb{R},$$

1. En calculant la torsion, montrer que la courbe γ est inclue dans un plan à déterminer.
2. Calculer la courbure de la courbe γ et en déduire que γ ne peut pas être un cercle.

.

Exercice 4. (8 points)
On considère la courbe plane $\gamma(t) = (\frac{1}{2}t, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}t + 1), t \in [a, b]$. En faisant tourner la courbe γ autour de l'axe (oz), on obtient une surface régulière $\mathcal{S}$ munie de l'atlas défini par les deux paramétrisations:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, \theta) &= (\frac{1}{2}t\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}t + 1), (t, \theta) \in [a, b] \times (0, 2\pi), \\ \varphi_2(t, \theta) &= (\frac{1}{2}t\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}t + 1), (t, \theta) \in [a, b] \times (-\pi, \pi). \end{aligned}$$

1. Donner le support géométrique de la courbe γ. Qu'appelle t-on la surface $\mathcal{S}$?
2. Calculer la première et la seconde forme fondamentale de la surface $\mathcal{S}$.
3. Calculer les courbures principales k_1 et k_2. En déduire la courbure Gaussienne $K = k_2 \cdot k_2$.

Bon courage.

Corrigé type de rattrapage
Module Géométrie (2023).

Exercice 1 : Soit $(E, \vec{E})$ un plan affine avec repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère deux points X, Y de E.

Ecrivons une équation paramétrique de la droite passant par X et Y.

D'abord soient $X = (1, x_1, x_2)$ et $Y = (1, y_1, y_2)$ les représentation de X et Y dans le repère $\mathcal{A}$ respectivement. Alors, on a si $M = (1, x, y)$ est un point de la droite, on obtient :

$\overrightarrow{MX} = \lambda \overrightarrow{XY}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et donc :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x - x_1 \\ y - x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \lambda(x_1 - y_1) + x_1 \\ y = \lambda(x_2 - y_2) + x_2 \end{cases}$$

qui est une paramétrisation de la droite passant par X et Y.

4 pt

Exercice 2 : soit la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + z^2 = 4 & ,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \\ y + x = 2 \end{cases}$$

Notons γ cette courbe. Une paramétrisation est donnée donc par $\gamma(t) = (2\cos t + 1, -2\cos t + 1, 2\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$

ou bien $\gamma(t) = (2\sin t + 1, -2\sin t + 1, 2\cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.

4 pt

Exercice 3 : soit γ la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\gamma(t) = (2\cos t + 1, -2\cos t + 1, 2\sin t),\ t \in \mathbb{R}.$$

1- Calcul de la torsion

On peut vérifier facilement que γ n'est pas paramétrée par la longueur d'arc. On applique donc la formule générale pour calculer la torsion.

On a donc : $\tau = \dfrac{\langle \dddot{\gamma}(t), \dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}(t)\rangle}{\|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}(t)\|^2}$, avec :

$\dot{\gamma}(t) = (-2\sin t, 2\sin t, 2\cos t)$,

$\ddot{\gamma}(t) = (-2\cos t, 2\cos t, -2\sin t)$,

$\dddot{\gamma}(t) = (+2\sin t, -2\sin t, -2\cos t)$,

et $\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma} = (-4, -4, 0)$ et $\langle \dddot{\gamma}, \dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}\rangle = 0$

Donc $\tau = 0$. 2 pt

Comme la torsion est nulle, alors, d'après un résultat de cours, la courbe γ est incluse dans un plan. L'équation de ce plan peut être déduite directement des composantes de γ, elle est : $x + y = 2$.

0,5

2- Calcul de la courbure :

On a la formule : $k(t) = \dfrac{\|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\left(\sqrt{1+4\sin^2 t}\right)^3}$.

1 pt

Comme la courbure $k(t)$ n'est pas constante, alors la courbe ne peut être un cercle. 0,5 pt

Exercice 4 : Soit la courbe plane $\gamma(t)=\left(\frac{1}{2}t, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}t+1\right)$, $t\in[a,b]$

et soit la surface S définie par :

$$\varphi_1(t,\theta)=\left(\frac{1}{2}t\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}(t+1)\right),\ (t,\theta)\in[a,b]\times(0,2\pi)$$

$$\varphi_2(t,\theta)=\left(\frac{1}{2}t\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}(t+1)\right),\ (t,\theta)\in[a,b]\times(-\pi,\pi).$$

1- Le support géométrique de la courbe γ est la droite de $\mathbb{R}^3$ définie par $\begin{cases} z=\sqrt{3}x+1 \\ y=0 \end{cases}$. C'est la droite qui passe par $(0,0,1)$ et de vecteur directeur $(1,0,\sqrt{3})$.

(2 pt)

2- a- Première forme fondamentale :

$$I=\begin{pmatrix} \left\|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right\|^2 & \left\langle\frac{\partial\varphi_i}{\partial t},\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}\right\rangle \\ \left\langle\frac{\partial\varphi_i}{\partial t},\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}\right\rangle & \left\|\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}\right\|^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\cos^2\theta+1) & -\frac{1}{4}t\cos\theta.\sin\theta \\ -\frac{1}{4}t\cos\theta\sin\theta & \frac{1}{4}(t^2\sin^2\theta+\cos^2\theta) \end{pmatrix}$$

(2 pt)

b- Seconde forme fondamentale :

$$II=\begin{pmatrix} \left\langle\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2},N\right\rangle & \left\langle\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t\partial\theta},N\right\rangle \\ \left\langle\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t\partial\theta},N\right\rangle & \left\langle\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\theta^2},N\right\rangle \end{pmatrix} \quad \text{avec } N=\frac{\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\wedge\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}}{\left\|\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\wedge\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta}\right\|}$$

On a donc $N=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\cos^2\theta+\frac{3}{4}t^2\sin^2\theta}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta, -\frac{\sqrt{3}}{4}t\sin\theta, \frac{1}{4}\cos^2\theta\right)$

et

$$II=\frac{1/2}{\sqrt{\cos^2\theta+\frac{3}{4}t^2\sin^2\theta}}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.\cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.\cos\theta & \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix}$$

(2 pt)

3- Les courbures principales sont les solutions de l'équation : $\mathrm{Det}(II-kI)=0 \iff$

$$-\frac{k}{4}(\cos^2\theta+1)\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{\sqrt{\cos^2\theta+\frac{3}{4}t^2\sin^2\theta}}-\frac{k}{4}(t^2\sin^2\theta+\cos^2\theta)\right)-(\sin\theta\cos\theta)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\cos^2\theta+\frac{3}{4}t^2\sin^2\theta}}+\frac{k\,t}{4}\right)^2=0$$

(2 pt)