Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
L2 Mathématiques
Probabilités

2022/2023

Examen Final /21

Durée 1h30

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace de probabilité, X une variable aléatoire réelle (v. a. r.) définie sur Ω.

Notations : f. r. : fonction de répartition ; f. d. : fonction de densité.

Questions de cours (*8pts*)

1 (1) Rappeler la définition de $\mathbb{P}$.

1 (2) Montrer qu'une probabilité ne peut pas être constante.

2 (3) Donner quatre propriétés de F_X, la fonction de répartition de X.

1 (4) Montrer qu'une application constante est une v. a. r.

0,5 + 1 (5) Montrer que si X admet f comme f. d., alors $f \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

0,75 + 0,75 (6) Rappeler la définition d'une v. a. r. qui suit une loi de Bernoulli et **calculer** sa variance.

Exercice 1. (*4pts*) → (5pts)

Soient $\lambda > 0$, X une v. a. r. de fonction de masse p_X donnée par

$$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

1 (1) Donner $X(\Omega)$, le support de X.

1,5 + 2 + 0,5 (2) Calculer la moyenne et la variance de X.

Exercice 2. (*8pts*)

Soient $c > 0$, X une v. a. r. de densité $f_X(x) = c\,x^{-3}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}$.

0,5 + 1 (1) Déterminer c et F_X, la f. r. de X.

0,5 + 0,5 + 1 (2) Calculer $\mathbb{P}(X \leq -2)$, $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$ et $\mathbb{P}(X^2 \geq 9)$.

1,5 (3) Trouver les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $\mathbb{E}(X^n) < \infty$.

1,5 + 0,5 + 1 (4) On pose $Y = 2X^2 - 1$, calculer F_Y (f. r.), f_Y (f. d.) et $\mathbb{E}(Y)$.

Q.C

1/ Déf de P : $P : \Omega \to [0,1]$ appl +
$P(\Omega)=1$ + $P(\bigcup_{k\geq 1} A_k) = \sum_{k\geq 1} P(A_k)$ pour $A_i \cap A_j = \phi$ (1 pt)

2/ Si P est une proba alors $P(\Omega)=1 \neq 0 = P(\phi)$ (1 pt)
Donc P n'est pas constante

3/ 4 Propriété de F_X :
$\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$, $F_X \nearrow$, $x \mapsto F_X$ continue à droite (2 pts)

4/ Posons $X(\omega) = c$ $\forall \omega \in \Omega$. (1 pt)
$X^{-1}(A) = \begin{cases} \Omega & \text{si } c \in A \\ \phi & \text{si } c \notin A \end{cases}$ Donc $\forall A \in \mathcal{B}$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

5/ $X \sim f$ f.d alors : $F' = f$ et F croissante $\Rightarrow$ $f \geq 0$ (0,5 pt)
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = F(+\infty) - F(-\infty) = 1-0 = 1$ (1 pt)

6/ $X \sim \mathcal{B}(p) \Leftrightarrow P(X=x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{si } x \in \{0,1\} \\ 0 & \text{si n} \end{cases}$ (0,75)

$E(X) = \sum_{X(\Omega)} k p_X(k) = 1 p_X(1) + 0 p_X(0) = p$ (0,75)

Exo 1 1/ $X(\Omega) = \mathbb{N}$ (1 pt)

$E(X) = \sum_{X(\Omega)} k p_X(k) = e^{-\lambda} \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$ (1,5 pt)

$$\mathbb{E}(X^2) = e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{k\geq 1} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \overset{k=j+1}{=} \lambda e^{-\lambda}\sum_{j\geq 0}(j+1)\frac{\lambda^j}{j!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left[\sum_{j\geq 1}\frac{\lambda^j}{(j-1)!} + \sum_{j\geq 0}\frac{\lambda^j}{j!}\right] = \lambda e^{-\lambda}\left[\lambda\sum_{j\geq 1}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} + e^{\lambda}\right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left[\lambda\sum_{j\geq 0}\frac{\lambda^j}{j!} + e^{\lambda}\right] = \lambda e^{-\lambda}\left[\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}\right] = \lambda^2 + \lambda.$$

2 pt

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$ 0,5

Exo 2:

1/ $1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dt = c\int_1^{\infty}\frac{dt}{t^3} = -\frac{c}{2}\left[t^{-2}\right]_1^{\infty} = \frac{c}{2} \Rightarrow \boxed{c = 2}$ 0,5

si $x \leq 1 \longrightarrow F_X(x) = 0$.

si $x > 1 \longrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 2\int_1^{x}\frac{dt}{t^3} = \left[-t^{-2}\right]_1^{x} =$

$$= 1 - \frac{1}{x^2}$$

d'où

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$ 1 pt

(2) $F_X(-2) = 0$ (car $-2 < 1$) 0,5

$P(2 \leq X \leq 4) = F_X(4) - F_X(2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

$P(X^2 > 9) = 1 - P(X^2 \leq 9) = 1 - P(-3 \leq X \leq 3)$

$= 1 - P(1 \leq X \leq 3) = 1 - F_X(3) = \frac{1}{9}$ 1 pt

9

$\mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_X(t)\,dt = 2\int_1^{\infty} t^{n-3}\,dt.$

1,5 pts

Si $n \geq 3$ $\mathbb{E}(X^n) = +\infty$

Si $n = 2$ $\mathbb{E}(X^2) = 2\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} = +\infty.$

Si $n \leq 1$ $\mathbb{E}(X^n) = \frac{2}{n-2}\left[t^{n-2}\right]_1^{\infty} = \frac{2}{2-n} < \infty.$

4/ $Y = 2X^2 - 1.$

Soit $y \in \mathbb{R}$; $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(2X^2 - 1 \leq y) = P(X^2 \leq \frac{y+1}{2})$

Si $\frac{y+1}{2} < 0 \Rightarrow F_Y(y) = 0$

1,5

Si $0 \leq \frac{y+1}{2} < 1 \rightarrow F_Y(y) = 0$

Si $\frac{y+1}{2} \geq 1 \rightarrow F_Y(y) = P(X \leq \sqrt{\frac{y+1}{2}}) = F_X(\sqrt{\frac{y+1}{2}}) = 1 - \frac{2}{y+1}.$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{2}{(y+1)^2}\mathbb{1}(y \geq 1).$

0,5

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(2X^2 - 1) = 2\mathbb{E}(X^2) - 1 = +\infty$

1 pt

REDMI NOTE 8
AI QUAD CAMERA