Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L2 Mathématiques

2022/2023

Examen Final d'analyse numérique 2
Corrigé

Exercice 1 (8 points)

On considère le problème

$$(P)\begin{cases} y' = -2y + te^{3t}, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Utiliser la méthode d'Euler pour approcher la solution de (P) avec un pas $h = 0.5$.
2. Déterminer la solution du problème .
3. Expliquez le concept d'erreur de consistance locale, puis déterminez sa borne.
4. Calculer la borne de l'erreur pour les approximations obtenues en 1.

On donne: $e^3 \approx 20 \qquad e^{-2} \approx 0.1$.

Solution

2 points par question

1. Sur 2 points
On pose $f(t, y) = -2y + te^{3t}$
La méthode d'Euler s'écrit:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \qquad n \ge 0$$

$y(0) = y_0 = 0$
$y(0.5) \approx y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 0$
$y(1) \approx y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 0.5f\,(0.5, 0) = 0.5 \times 0.5 \times e^{3/2} = 0.25e^{3/2}$

2. L'équation $y'(t) = -2y$ admet comme solution $y(t) = Ke^{-2t}$
La méthode de variation de la constante:
On pose $y'(t) = K'(t)e^{-2t} - 2K(t)e^{-2t}$,
en remplaçant dans l'équation du problème on obtient:
$K'(t) = te^{5t}$ ce qui implique $K(t) = \frac{1}{5}\left(t - \frac{1}{5}\right)e^{5t} + c$ et la solution de l'équation est :

$$y(t) = \left(\frac{1}{5}t - \frac{1}{25}\right)e^{3t} + ce^{-2t}$$

La condition initiale implique $c = \frac{1}{25}$ et donc la solution du problème est :

$$y(t) = \left(\frac{1}{5}t - \frac{1}{25}\right)e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$$

3. L'erreur de consistance locale est donnée par

$$|\tau_n| \le \frac{M}{2}h^2$$

où $M = \max\limits_{t\in[0,1]} y''(t)$
$y'(t) = \left(\frac{3}{5}t + \frac{2}{25}\right)e^{3t} - \frac{2}{25}e^{-2t} \Rightarrow y''(t) = \left(\frac{9}{5}t + \frac{21}{25}\right)e^{3t} + \frac{4}{25}e^{-2t} \Rightarrow y'''(t) = \left(\frac{18}{5}t + \frac{108}{25}\right)e^{3t} - \frac{8}{25}e^{-2t}$ on voit bien que
$\forall x \in [0,1] \qquad y'''(t) > 0$ donc la fonction $y''(t)$ est positive et strictement croissante et

$$\begin{aligned} M &= y''(1) = \left(\frac{66}{25}\right)e^3 + \frac{4}{25}e^{-2} \\ &\approx \left(\frac{66}{25}\right)20 + \frac{4}{25}0.1 \\ &\approx \frac{1320.4}{25} \end{aligned}$$

$$|\tau_n| \leq \frac{1320.4}{50}0.25$$

4. La fonction $f(t,y)$ est lipschitzienne par rapport à y uniformemment par rapport à t avec une constante de Lipschitz $L = 2$.
La borne de l'erreur de la méthode d'Euler est donnée par la formule

$$|y(t_i) - y_i| \leq \frac{Mh}{2L}\left(e^{L(t_i - t_0)} - 1\right)$$

Au point $t_1 = 0.5 \qquad |y(t_1) - y_1| \leq \frac{M}{8}\left(e^{2(t_1 - t_0)} - 1\right) = \frac{52.8}{8}(e-1)$
Au point $t_2 = 1 \qquad |y(t_2) - y_2| \leq \frac{M}{8}\left(e^{2(t_2 - t_0)} - 1\right) = \frac{52.8}{8}(e^2-1)$

Exercice 2 (6 points)
1. Soit $v \in R^n$ un vecteur non nul et soit H la matrice de Householder associée à v. Montrer que H est une matrice orthogonale.
2. Calculer HB où H est la première matrice de Householder pour réduire la matrice B suivante en une forme triangulaire supérieure.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Solution
1. Sur 2 points
On peut tout d'abord calculer H^T :

$$\begin{aligned} H^T &= (I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}})^T \\ &= I^T - (2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}})^T \\ &= I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} \\ &= H \end{aligned}$$

On remarque alors que $H^TH = HH = (I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}})(I - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}})$. En développant ce produit matriciel, on obtient :

On peut alors utiliser la relation $vv^Tv = v(v^Tv) = v(\|v\|^2)$ pour simplifier l'expression :

$$\begin{aligned} H^TH &= I - 4\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} + 4\frac{\mathbf{v}^T\mathbf{v}\mathbf{v}^T\mathbf{v}}{(\mathbf{v}^T\mathbf{v})^2} \\ &= I - 4\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} + 4\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}} \\ &= I \end{aligned}$$

Ainsi, $H^TH = I$, ce qui montre que la matrice de Householder H est orthogonale.
2. sur 4 points
On pose
$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors
$v = a + \text{sign}(a_{11})\|a\|e_1$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3+\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \\ &= -\frac{1}{3+\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} & 1 \\ 1+\sqrt{3} & 1 & -2-\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T =: \begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}+1\right)^2 & \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}+1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3}+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3+\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}+1\right)^2 & \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}+1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3}+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$: \begin{pmatrix} \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{3}+3} & \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} & \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} & \frac{1}{\sqrt{3}+3} & \frac{1}{\sqrt{3}+3} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+3} & \frac{1}{\sqrt{3}+3} & \frac{1}{\sqrt{3}+3} \end{pmatrix}$
alors

$$\begin{aligned} HB &= -\frac{1}{3+\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} & 1 \\ 1+\sqrt{3} & 1 & -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3+\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3}+3 & 15\sqrt{3}+15 & 25\sqrt{3}+25 \\ 0 & -\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 0 & -2\sqrt{3}-3 & -3\sqrt{3}-5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3 (6 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Localiser les valeurs propres de la matrice A. Donner une borne de son rayon spectral
2. Calculez l'approximation de la valeur propre dominante obtenue après une itérations de la méthode de la puissance à partir du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. Donner l'erreur absolue de l'approximation trouvée en 2.

Solution

1. Sur 1.5 points

La matrice A étant symétrique ses valeurs propres sont réelles. D'après les disques de Gershgorin elles appartiennent à $[0, 4]$.

$$\rho(A) \leq 4.$$

2. Sur 2.5 points

On a

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{Ax^{(0)}}{\|Ax^{(0)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{34}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= \left\langle x^{(1)}, Ax^{(1)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{34} \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &= \frac{116}{34} = \frac{58}{17} \end{aligned}$$

3. Sur 2 points

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2 - \sqrt{2}$ et $\lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$.
$\lambda^{(1)}$ est une approximation de λ_3.

$$\begin{aligned} \left|\lambda_3 - \lambda^{(1)}\right| &= \left|\frac{58}{17} - 2 - \sqrt{2}\right| \\ &= \left|\frac{24}{17} - \sqrt{2}\right|. \end{aligned}$$