Université de Tlemcen. le 15/05/2023

L2 Mathématiques

Epreuve finale du module "Analyse complexe"

Exercice n° 1

Soit f une fonction uniforme holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, sauf en un nombre fini de singularités $z_1, \dots, z_n$ intérieures à C, montrer que

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Citation du théorème (a)
Citation de la remarque
Dessin 1pt
explication 1,5pt
Reste 1,5pt.

Exercice n° 2

C désignant le cercle unité parcouru dans le sens direct,

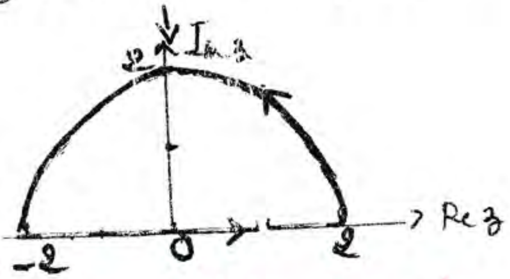
calculez $\displaystyle\int_C \frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^2}\,dz$.

Formule intégrale de Cauchy 1pt.
$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 1pt. Résultat : 1 p
ou bien la méthode des résidus

Exercice n° 3

Evaluer $\displaystyle\oint_C \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz$ où C désigne le demi-cercle de centre 0 et de rayon 2

Explication des pôles 1pt
Résidu 2pts
Résultat 1pt



Exercice n° 4

Evaluer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Explication de l'utilisation de l'analyse complexe 1pt dessin 0,5pt
Calcul du résidu : 1pt.
$\lim I_1$: 1pt
$\lim I_2$: 2pts. Reste : 1,5pts

Exercice n° 1 : 6pts Exercice n° 2 : 3pts Exercice n° 3 : 4pts Exercice n° 4 : 7p

Bon Courage.

Université de Tlemcen.   le 13/05/2023

L2 Mathématiques

Epreuve finale du module "Analyse complexe"

Exercice n° 1

Soit f une fonction uniforme holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, sauf en un nombre fini de singularités $z_1, \ldots, z_n$ intérieures à C, montrer que

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

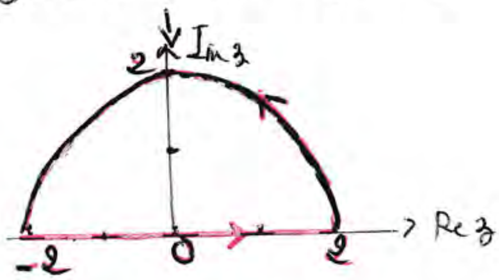
Exercice n° 2

C désignant le cercle unité parcouru dans le sens direct,

calculez $\displaystyle\int_C \frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^2}\,dz.$

Exercice n° 3

Evaluer $\displaystyle\oint_C \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz$ où C désigne le demi-cercle de centre 0 et de rayon 2



Exercice n° 4

Evaluer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2}\,dx.$

Exercice n° 1 : 6pts Exercice n° 2 : 3pts Exercice n° 3 : 4pts Exercice n° 4 : 7pts

Bon Courage.

Université de Tlemcen.
L2 Mathématiques
Module : Analyse complexe.

Corrigé de l'épreuve finale.

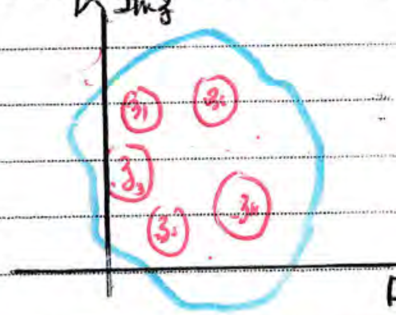
Exercice n° 1

Soit f une fonction uniforme holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C, sauf en un nombre fini de singularités $z_1, \dots, z_n$ intérieures à C, montrer que :

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k)$$

Solution

Puisque les points $z_1, \dots, z_n$ sont à l'intérieur de C, on peut alors construire les cercles $C_1, \dots, C_n$ centrés en $z_1, \dots, z_n$ respectivement contenus à l'intérieur de C, disjoints 2 à 2.



En utilisant le théorème qui dit : "toute fonction holomorphe dans un domaine connexe limité par deux courbes fermées et simples C et C_1 et sur ces courbes, alors $\oint_C f(z).dz = \oint_{C_1} f(z).dz$" et la remarque qui dit : "Le théorème précédent peut être étendu à un domaine connexe limité par une courbe fermée simple C et un nombre fini de courbes fermées simples $C_1, \dots, C_n$ intérieures à C, dans ce cas on a : $\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz$"

on aura $$\oint f(z).dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z).dz$$

or par définition du résidu :

$$\oint_{C_k} f(z).dz = 2\pi i\, Res(f, z_k) \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

on déduit que $$\oint_C f(z).dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

M. Mebkhout

Exercice n° 2

C désignant le cercle unité parcouru dans le sens direct. Calculer

$$\int_C \frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^2} dz.$$

Solution :

Considérons $f(z) = \sin^6 z$ elle est clairement holomorphe à l'intérieur de C et sur C ; on peut alors appliquer la formule intégrale de Cauchy.

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^2} dz.$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^2} dz = 2i\pi f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminons $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$f'(z) = 6\sin^5 z . \cos z \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^5 \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= 6 . \frac{1}{2^5} . \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2^5}$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^2} dz = \frac{i\pi . 3\sqrt{3}}{16}.$$

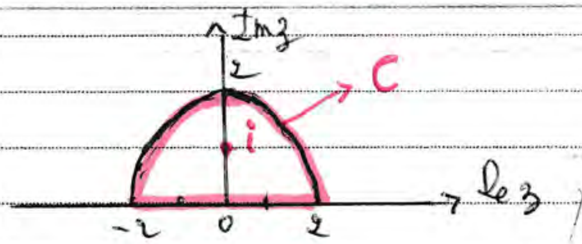
M.Mekhlat

Exercice n° 3

Evaluer $\oint_C \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz$ où C désigne le demi-cercle de centre 0 et de rayon 2.

Solution

Le seul pôle de $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2+1}$ intérieur à C est le pôle simple i



$$Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\log(z+i)}{(z-i)(z+i)} = \frac{\log(2i)}{2i}$$

On a donc - d'après le théorème des residus,

$$\oint \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\,Res(f,i) = 2\pi i\,\frac{\log(2i)}{2i} = \pi\log(2i)$$
$$= \pi\left(\mathrm{Log}\,2 + i\frac{\pi}{2}\right)$$

Conclusion

$$\oint \frac{\log(z+i)}{z^2+1}\,dz = \pi\,\mathrm{Ln}(2) + \frac{1}{2}\pi^2 i.$$

Exercice n° 4

Evaluer $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx$.

Solution

On fait appel à l'analyse complexe en en considérant $\int_C \frac{z e^{iz}}{z^2+1}\,dz$, où C désigne le contour fermé formé du segment $[-R,R]$ et du demi-cercle Γ_R décrit dans le sens direct

H. Mebkhout

Le seul pôle de $f(z) = \frac{z e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ situé à l'intérieur de C est i, c'est un pôle double, par conséquent d'après le cours :

$$Res(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 \frac{z e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[e^{iz} \frac{z}{(z+i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to i}\left[i e^{iz} \cdot \frac{z}{(z+i)^2} + e^{iz}\left(\frac{(z+i)^2 - z.(2).(z+i)}{(z+i)^4}\right)\right]$$

$$= \lim_{z\to i}\left[\frac{e^{iz}\left(iz(z+i)^2\right) + (z+i)^2 - 2z(z+i)}{(z+i)^4}\right]$$

$$= \frac{e^{-1}}{16}(+4 - 4 + 4) = \frac{e^{-1}}{4} = \frac{1}{4e}$$

$$\Rightarrow Res(f,i) = \frac{1}{4e}.$$

En utilisant le théorème des résidus on aura.

$$\int_C \frac{z e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \cdot Res(f,i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4e} = \frac{\pi i}{2e}.$$

d'autre part $\displaystyle\int_C \frac{z e^{iz}}{(z^2+1)^2} = \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_R} \frac{z . e^{iz}}{(z^2+1)^2} . dz}_{I_2}$

$$I_1 = \int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2+1} dx = \int_{-R}^{R} \frac{x \cos x}{(x^2+1)^2} . dx + i \int_{-R}^{R} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} . dx$$

$$= 0 + i \int_{-R}^{R} \frac{x \sin x}{x^2+1} . dx \quad \text{car } \frac{x \cos x}{(x^2+1)^2} \text{ st impa}$$

$$\Rightarrow I_1 = i \int_{-R}^{R} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} . dx \xrightarrow[R\to+\infty]{} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} . dx$$

M. Mebkhout

$$I_2 = \int_{\Gamma_R} \frac{z e^{iz}}{(z^2+1)^2} \, dz = \int_0^{\pi} \frac{R e^{i\theta} e^{iRe^{i\theta}}}{((Re^{i\theta})^2+1)^2} \cdot R i e^{i\theta} \, d\theta$$

$$= i \int_0^{\pi} \underbrace{e^{iRe^{i\theta}}}_{h(R)} \underbrace{\frac{(Re^{i\theta})^2}{((Re^{i\theta})^2+1)^2}}_{g(R)} \, d\theta$$

$$g(R) = \frac{(Re^{i\theta})^2}{(Re^{i\theta})^4\left(1+\frac{1}{(Re^{i\theta})^2}\right)^2} = \frac{1}{(Re^{i\theta})^2\left(1+\frac{1}{(Re^{i\theta})^2}\right)^2} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

$$h(R) = e^{iRe^{i\theta}} = e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$= e^{iR\cos\theta} \cdot e^{-R\sin\theta} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow h(R)g(R) \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow I_2 \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow (I_1 + I_2) \xrightarrow[R \to +\infty]{} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} \, dx$$

Comme $\underbrace{I_1 + I_2}_{R \to +\infty} = \int \frac{z e^{iz}}{(z^2+1)^2} = \underbrace{\frac{\pi i}{2e}}_{R \to +\infty}$

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} \, dx = i \frac{\pi}{2e}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} \, dx = \frac{\pi}{2e} \quad \text{or} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2}$$

car $\frac{x \sin x}{(x^2+1)^2}$ est paire on conclue que $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} \, dx = \frac{\pi}{4e}$.

M. Mekkhout