Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

2ème année MATH- Semestre 2

Examen final : Analyse 4

Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (5.5 Pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$f(x,y) = (\cos(x) + \sin(y), -\sin(x) + \cos(y), 2\sin(x)\cos(y)).$$

Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(f)$ de f au point (x,y).

2) Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(u,v,w) = u^2 + v^2 + w.$$

Déterminer la matrice Jacobienne $J_{(u,v,w)}(g)$ de g au point (u,v,w).

3) Calculer de deux manières différentes la matrice Jacobienne $J_{(x,y)}(g \circ f)$ de $g \circ f$ au point (x,y).

Exercice 2. (6.5 Pts)

On définit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3} + xy$$

1) Donner le développement limité de f en $(0,0)$ à l'ordre 2.
2) Trouver les points critiques de f.
3) Déterminer la nature des points critiques.
4) La fonction f a-t-elle un minimum ou un maximum global ?

Exercice 3. (8 Pts)

Soit D le domaine suivant

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{et} \quad y \geq 1\}.$$

1) Représenter le domaine D.
2) Calculer l'aire du domaine D.
3) Calculer l'intégrale double suivante

$$I = \iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2} dxdy$$

4) En déduire la valeur de l'intégrale triple suivante

$$J = \iiint_\Delta \frac{y^2}{x^2+y^2} \sin(z)\sin(2z) dxdydz,$$

où $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \in D, \quad 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

2ème année M.I - Semestre 2

Corrigé de l'examen final : Analyse 4

Durée : 1h30mn

Exercice 1. (5.5 Pts)

1) On a

$$f(x,y) = (\cos(x)+\sin(y), -\sin(x)+\cos(y), 2\sin(x)\cos(y)).$$

On pose $u = \cos(x)+\sin(y), v = -\sin(x)+\cos(y), w = 2\sin(x)\cos(y)$.
Alors, la matrice Jacobienne de f est donnée par

$$J_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Donc,

$$J_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & \cos(y) \\ -\cos(x) & -\sin(y) \\ 2\cos(x)\cos(y) & -2\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} \quad \textbf{(1.5Pts)}$$

2) On a $g(u,v,w) = u^2+v^2+w$. La matrice Jacobienne de g est donnée par

$$J_{(u,v,w)}(g) = (2u \quad 2v \quad 1) \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

3) On a

$$g\circ f(x,y) = g(f(x,y)) = g(\cos(x)+\sin(y), -\sin(x)+\cos(y), 2\sin(x)\cos(y))$$

$$= (\cos(x)+\sin(y))^2 + (-\sin(x)+\cos(y))^2 + 2\sin(x)\cos(y) = 2+2\cos(x)\sin(y). \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

La première méthode, c'est le calcul direct de la matrice Jacobienne

$$J_{(x,y)}(g\circ f) = (-2\sin(x)\sin(y) \quad 2\cos(x)\cos(y)). \quad \textbf{(0.5Pt)}$$

Pour la deuxième méthode, on utilise

$$J_{(x,y)}(g\circ f) = J_{f(x,y)}(g).J_{(x,y)}(f) \quad \textbf{(1Pt)}$$

$$= (2(\cos(x)+\sin(y)) \quad 2(-\sin(x)+\cos(y)) \quad 1) \begin{pmatrix} -\sin(x) & \cos(y) \\ -\cos(x) & -\sin(y) \\ 2\cos(x)\cos(y) & -2\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

$$= (-2\sin(x)\sin(y) \quad 2\cos(x)\cos(y)) \quad \textbf{(1.5Pts)}$$

Exercice 2. (6.5 Pts)

On a $f(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3} + xy$.
On remarque que $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ puisque f est un polynôme.
1) Le développement limité de f en (x_0,y_0) est

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h_1^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)h_2^2$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)h_1h_2 + \circ(\|h\|^2). \quad \textbf{(0.75Pts)}.$$

Puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2 + x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad (\mathbf{1.25Pts})$$

alors

$$f(h_1, h_2) = h_1^2 + h_1 h_2 + \circ(\|h\|^2). \quad (\mathbf{0.5Pts})$$

2) Les points critiques de f vérifient

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x + y & = & 0 \\ y^2 + x & = & 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y & = & -2x \\ x = 0 & \text{ou} & x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc, les points critiques de f sont $(0,0)$ et $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. $\quad$ **(1 Pt)**
3) La nature des points critiques :
Remarquons que

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $det \quad Hess_f(0,0) = -1 < 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$, $\quad$ **(1 Pt)** alors $(0,0)$ est un point selle. **(0.25 Pt)**
Pour le point $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, on a

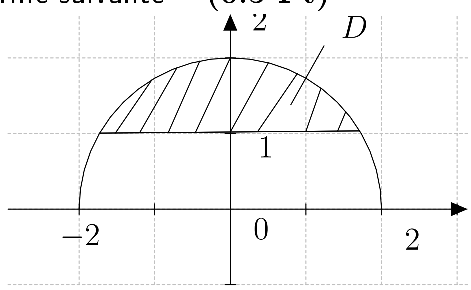
$$Hess_f(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $det \quad Hess_f(0,0) = 1 > 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$, $\quad$ **(1 Pt)** alors $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ est un minimum local. **(0.25 Pt)**
4) On remarque que

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} f(x,y) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{y \to -\infty \\ x \text{ fixé}}} f(x,y) = -\infty,$$

donc, la fonction f n'a pas de maximum, ni de minimum global. **(0.5 Pt)**

Exercice 3. (8 Pts)
1) Le domaine D possède la forme suivante **(0.5 Pt)**



2) L'aire du domaine D est donné par

$$Aire(D) = \iint_D dxdy.$$

L'intersection de $x^2 + y^2 = 4$ et $y = 1$ implique que $x = \pm\sqrt{3}$.
Donc,

$$Aire(D) = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-x^2}} dydx \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

$$= 2\left[\int_0^{\sqrt{3}} [y]_1^{\sqrt{4-x^2}}\, dx\right]$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-x^2}-1)dx \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

On pose $x = 2\sin(\theta) \Rightarrow dx = 2\cos(\theta)d\theta$. Alors, pour $x = 0$, on a $\theta = 0$ et pour $x = \sqrt{3}$, on a $\theta = \frac{\pi}{6}$. Donc,

$$Aire(D) = 2\left[\int_0^{\pi/6} \sqrt{4-4\sin^2(\theta)}(2\cos(\theta))d\theta - \int_0^{\pi/6}(2\cos(\theta))d\theta\right]$$

$$= 8\int_0^{\pi/6} cos^2(\theta)d\theta - 4\int_0^{\pi/6}\cos(\theta)d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/6} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta - 4\int_0^{\pi/6}\cos(\theta)d\theta$$

$$= 4\left[\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/6} - 4\left[\sin(\theta)\right]_0^{\pi/6} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} - 2 \quad (\mathbf{1.25Pt})$$

3) Le calcul de l'intégrale double. On a

$$I = \iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy.$$

En utilisant les coordonnées polaires ($x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$) $\;(\mathbf{0.25\ Pt})$, on obtient

$$I = \iint_{D'} \frac{r^2\sin^2(\theta)}{r^2} rdrd\theta, \quad (\mathbf{0.25Pt})$$

où $D' = \{(r,\theta)/ \quad r^2 \leq 4 \quad \text{et} \quad r\sin(\theta) \geq 1\}$. $\;(\mathbf{2\ Pts})$
Remarquons que l'intersection de $x^2+y^2 = 4$ et $y = 1$ implique que $x = \pm\sqrt{3}$. Donc,

$$x = \sqrt{3} = 2\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

$$x = -\sqrt{3} = 2\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

Ainsi, $D' = \{(r,\theta)/ \quad \frac{1}{\sin(\theta)} \leq r \leq 2, \quad \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]\}$. Donc,

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{\frac{1}{\sin(\theta)}}^{2} r\sin^2(\theta)drd\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\frac{1}{\sin(\theta)}}^{2} \sin^2(\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin^2(\theta) - \frac{1}{2})d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (\frac{1}{2} - \cos(2\theta))d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (\mathbf{2Pts})$$

4) Pour le calcul de l'intégrale triple J, on remarque que

$$J = (\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}dxdy)(\int_0^{\pi/2} \sin(z)\sin(2z)dz) = (\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})\int_0^{\pi/2}(2\sin^2(z)\cos(z))dz$$

$$= 2(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})\left[\frac{\sin^3(z)}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad (\mathbf{1.25Pts})$$