Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Aboubekr Belkaid – Tlemcen

Epreuve Finale Algèbre 4 Durée : 1h-40 21-05-2023

Exercice 1 : Soit A une matrice scalaire réelle carrée d'ordre 2 possédant la valeur propre α^2 non nulle. Donner par deux manières différentes la matrice exp(tA), t>0.
Rappel : A est une matrice scalaire c'est-à-dire A est multiple de la matrice identité. 5 points

Exercice 2 : On considère dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, la droite D représentée par le système d'équations :

$$x-y+z=0 \text{ et } y=2z.$$

Déterminer de deux manières différentes la projection orthogonale p sur le sous espace des vecteurs u de $\mathbb{R}^3$ vérifiant p(u)-u=0, de la symétrie orthogonale s d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par rapport à la droite D. 8 points

Exercice 3 : Calculer de deux manières différentes

$$\min_{a \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax + 1)^2 dx.$$ 7points

Rappel :

$$d = \|p1 - p2\| = (\int_0^1 \left(p1(x) - p2(x)\right)^2 dx)^{1/2}$$

est une distance entre deux polynômes $p1$ et $p2$.

Corrigé E.F Algèbre 4 (1)

EXO1 5pts

A matrice scalaire de valeur propre $\alpha^2 \neq 0$

$$A = \alpha^2 I_2 = \alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1ère Méthode:

$t > 0$; 1 $$tA = t\alpha^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} t\alpha^2 & 0 \\ 0 & t\alpha^2 \end{pmatrix}}_{\text{matrice diagonale}}$$

On a donc: $$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha^2} & 0 \\ 0 & e^{t\alpha^2} \end{pmatrix}.$$
1

2ème Méthode:

$t > 0$; $$e^{tA} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i = \sum_{0}^{1} \alpha_i(t) A^i$$
$$= \alpha_0(t) I_2 + \alpha_1(t) A.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} e^{\alpha^2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\alpha^2 \\ \dfrac{d}{d\alpha^2}(e^{\alpha^2 t}) = \alpha_1(t) \Leftrightarrow te^{\alpha^2 t} = \alpha_1(t) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 \quad \alpha_0(t) = (1 - t\alpha^2)e^{\alpha^2 t} \\ 1 \quad \alpha_1(t) = te^{\alpha^2 t} \end{cases}$$

Donc: $$e^{tA} = (1 - t\alpha^2)e^{\alpha^2 t} I_2 + te^{\alpha^2 t} A.$$

$$= \begin{pmatrix} (1-t\alpha^2)e^{\alpha^2 t} & 0 \\ 0 & (1-t\alpha^2)e^{\alpha^2 t} \end{pmatrix} + te^{\alpha^2 t} \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

1

$$= \begin{pmatrix} e^{\alpha^2 t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha^2 t} \end{pmatrix}.$$

Exo 2 8 pts

$$(D) : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$

$(x,y,z) \in (D) \Leftrightarrow (x,y,z) = (z, 2z, z) = z(1,2,1)$

Donc $\boxed{(D) = \text{vect}(1,2,1)}$ 1

1ère Méthode :

- S : symétrie orthogonale de $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par rapport à (D).
- p : projection orthogonale de $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sur $F = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ p(u) = u\}$

Il y a deux possibilités pour calculer $p(S(v))$:

1) Soit $F = (P) \perp (D)$

Donc $\boxed{(P) : x + 2y + z = 0}$ 1

2) Soit $F = (D) = \text{Vect}(1,2,1)$

1) $F = (P)$

$(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow (x,y,z) = (-2y - z, y, z)$

$= y\underbrace{(-2,1,0)}_{v_1} + z\underbrace{(-1,0,1)}_{v_2}$

$\boxed{(P) = \text{Vect}\{v_1, v_2\}}$ 1

Gram-Schmidt

On pose $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$

$w_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1}{\|v_2 - \langle v_2, w_1\rangle w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(-1,-2,5)$

$\boxed{(w_1, w_2) \text{ est une base orthonormale de } (P)}$ 1

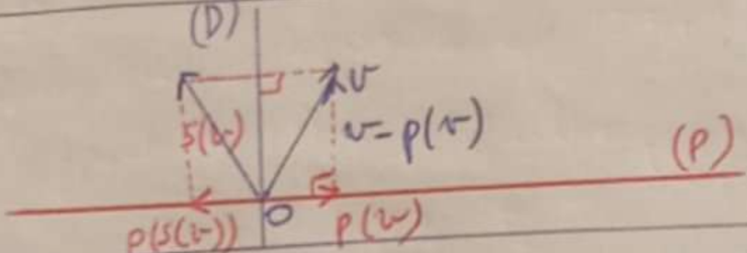
3

$$p(v) = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2$$

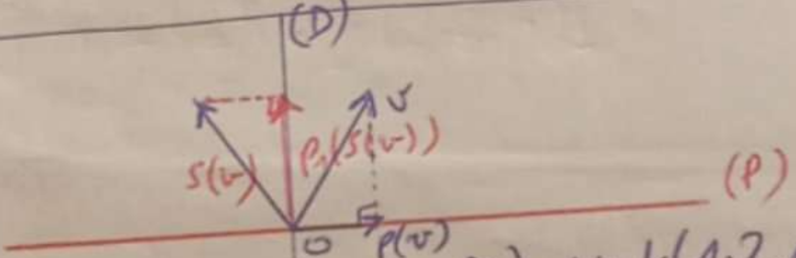
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y)\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{30}}(-x-2y+5z)\frac{1}{\sqrt{30}}(-1,-2,5)$$

1 $\boxed{p(v) = (5x-2y-z,\ -2x+2y-2z,\ -x-5y+5z)}$



1
$$\boxed{\begin{aligned} p(s(v)) &= -p(v) \\ p(s(v)) &= (-5x+2y+z,\ 2x-2y+2z,\ x+5y-5z) \end{aligned}}$$



2ème Méthode :

↳ 2) $F = (D)$

soit p_1 la proj. orthogonale sur $(D) = \mathrm{Vect}(1,2,1)$

On a donc :

$$\boxed{p_1(s(v)) = \langle s(v), \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2,1)\rangle \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2,1)}$$

c'est aussi : (plus simple)

1
$$\boxed{\begin{aligned} p_1(s(v)) &= v - p(v) \\ &= (x,y,z) - (5x-2y-z,\ -2x+2y-2z,\ -x-5y+5z) \\ &= (-4x+2y+z,\ 2x-y+2z,\ x+5y-4z) \end{aligned}}$$

Remarque : Dans notre cas : $s(v) = v - 2p(v)$

1
$$\boxed{\begin{aligned} s(v) &= (x,y,z) - (10x-4y-2z,\ -4x+4y-4z,\ -2x-10y+10z) \\ s(v) &= (-9x+4y+2z,\ 4x-3y+4z,\ 2x+10y-9z) \end{aligned}}$$

Exo3 7pts $\min_{a\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2-ax+1)^2\,dx$

1ère Méthode (Terminale)

$$\int_0^1 (x^2+1-ax)^2\,dx$$
$$= \int_0^1 \left((x^2+1)^2 - 2ax(x^2+1) + a^2x^2\right)dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^4 - 2ax^3 + (a^2+2)x^2 - 2ax + 1\right)dx$$
$$= \frac{x^5}{5} - 2a\frac{x^4}{4} + (a^2+2)\frac{x^3}{3} - 2a\frac{x^2}{2} + x \Big|_0^1$$
$$= \underbrace{\frac{a^2}{3} - \frac{3a}{2} + \frac{28}{15}}_{I(a)}$$

On calcule $\min_{a\in\mathbb{R}} I(a)$:

$$I'(a) = 0 \iff \frac{2a}{3} - \frac{3}{2} = 0$$
$$\iff a = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\boxed{a = \frac{9}{4}}$$

1

$$\min_{a\in\mathbb{R}} I(a) = I\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{81}{48} - \frac{27}{8} + \frac{28}{15} = \frac{43}{240}$$

$$\boxed{I\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{43}{240}}$$

1

$2^{ème}$ Méthode (Algèbre 4)

$$\min_{a\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax + 1)^2 dx = ?$$

$$\|x^2+1-ax\|^2 = \langle x^2+1-ax,\ x^2+1-ax\rangle$$
$$= \int_0^1 (x^2+1-ax)^2 dx$$

1 Prenons dans ce cas le produit scalaire :
$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(x)\,Q(x)\,dx,$$
$P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.
(On l'a fait en TD).

1 Soit $F = \{ P \in \mathbb{R}[x] \ /\ P(x) = ax,\ a\in\mathbb{R}\}$

1 F est un s.e.v de $\mathbb{R}_2[x]$
$\dim F = 1$ car une base de F est $\{x\}$

Posons $e_1 = x$, $e_1' = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$

$$\|e_1\|^2 = \langle e_1, e_1\rangle$$
$$= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Donc $e_1' = \sqrt{3}\,e_1 = \sqrt{3}\,x$

1 $\{e_1'\}$ est la base normée de F, selon Gram-Schmidt

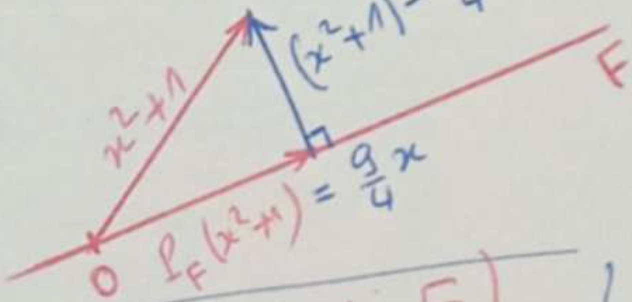
$p_F(x^2+1) = \langle x^2+1 , e'_1 \rangle e'_1$

$= \left(\int_0^1 (x^2+1)(\sqrt{3}x)\,dx \right) \sqrt{3}\,x$

$= \left[\frac{\sqrt{3}}{4} x^4 + \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 \right]_0^1 \sqrt{3}\,x$

1 $= \frac{9}{4} x$

$\Longrightarrow \boxed{a = \frac{9}{4}}$



1 $\boxed{\| (x^2+1) - p_F(x^2+1) \|^2 = d^2(x^2+1, F)}$

$= \int_0^1 (x^2+1 - p_F(x^2+1))(x^2+1 - p_F(x^2+1))\,dx$

$= \int_0^1 (x^2+1)(x^2+1 - p_F(x^2+1))\,dx$

$= \int_0^1 (x^2+1)^2\,dx - \frac{9}{4} \int_0^1 (x^2+1)x\,dx$

1 $= \int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx - \frac{9}{4} \cdot \int_0^1 (x^3 + x)\,dx$

$= \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 - \frac{9}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right)$

$= \frac{28}{15} - \frac{27}{16} = \boxed{\frac{43}{240}}$.

FIN