Univesrité Aboubekr Belkaïd de Tlemcen
Faculté des sciences
Departement de mathématiques.

Niveau: L2
Module: Géométrie
Année universitaire: 2022-2023.

Contrôle continu.
Durée: 75 minutes

Exercice 1. Déterminer une paramétrisation de la courbe définie par:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ z - x = 2. \end{cases}$$

Exercice 2. Soit γ la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par la paramétrisation

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos(t) - 1, 2\sin(t), \sqrt{2}\cos(t) + 1), t \in \mathbb{R}.$$

1. Trouver $\tilde{\gamma}(s)$ la réparamétrisation de γ par la longueur de l'arc.
2. Calculer la courbure et la torsion de $\tilde{\gamma}$.
3. En déduire que la courbe γ est un cercle. Déterminer son centre, rayon et le plan dans lequel il est contenu.

Exercice 3. Soit la sphère unité

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

1. Rappeler pourquoi $\mathcal{S}$ est une surface régulière et calculer sa première forme fondamentale.
2. En déduire la longueur de l'arc $\gamma(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة أبوبكر بلقايد - تلمسان - كلية العلوم
UNIVERSITÉ ABOU-BAKR BELKAID - TLEMCEN - FACULTÉ DES SCIENCES

Année Universitaire .... السنة الدراسية
Examen .... الإختبار
Date .... التاريخ
Signature de l'Etudiant .... إمضاء الطالب

Nom .... اللقب
Prénom .... الإسم
Né (e) le .... تاريخ الإزدياد
N° Carte d'Etudiant .... رقم بطاقة الطالب

Observations ملاحظات

Note النقطة

/20

Contrôle continu du module Géométrie
Corrigé type.

Ex1 :

Une paramétrisation de la courbe

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ z-x=2 \end{cases}$$

On a : $x^2+y^2+(x+2)^2=6 \Leftrightarrow 2(x+1)^2+y^2=4$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$$

On obtient donc, comme paramétrisation

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t-1 \\ y=2\sin t \\ z=\sqrt{2}\cos t+1. \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

5 pts

Ex2 : Soit γ la courbe.

$\gamma(t)=(\sqrt{2}\cos t-1,\ 2\sin t,\ \sqrt{2}\cos t+1),\ t\in\mathbb{R}$.

1- Reparamétrisation $\tilde{\gamma}$ de γ par la longueur de l'arc.
On calcule d'abord l'abscisse curviligne de γ
On a : $s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\gamma'(t)\|\,dt=\int_{t_0}^{t}2\,dt=2(t-t_0)$.

Prenons $t_0 = 0$, on obtient :

$$S(t) = 2t \Longleftrightarrow t = \frac{S}{2}$$

on aura donc :

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\tfrac{s}{2}) = \left(\sqrt{2}\cos\tfrac{s}{2} - 1,\ 2\sin\tfrac{s}{2},\ \sqrt{2}\cos\tfrac{s}{2} + 1\right),\ s \in \mathbb{R}.$$

1 pt

2_ Courbure et torsion de $\tilde{\gamma}$.

Comme $\tilde{\gamma}$ est paramétrée par la longueur de l'arc, on aura :

$$k(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\| = \sqrt{2}.$$ 2 pt

_Torsion :

On a : $\tau = \langle \dot{b}, n \rangle$ avec $b = T \wedge n$ est le vecteur binormal et n est le normal unitaire.

On a : $n = \dfrac{\dot{T}}{k(s)} = \dfrac{\tilde{\gamma}''(s)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos\dfrac{s}{2},\ -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{s}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos\dfrac{s}{2}\right)$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\tfrac{s}{2},\ \sin\tfrac{s}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\tfrac{s}{2}\right)$$

on aura donc :

$$b = \left(\begin{vmatrix} \cos\frac{s}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{s}{2} \\ -\sin\frac{s}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{s}{2} \end{vmatrix},\ - \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{s}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{s}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{s}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{s}{2} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{s}{2} & \cos\frac{s}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{s}{2} & -\sin\frac{s}{2} \end{vmatrix} \right)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ 2 pt

Donc $\tau = 0$.

3- Comme la courbure de $\tilde{\gamma}$ est constante et la torsion est nulle, alors d'après un résultat de cours $\tilde{\gamma}$ est un cercle. Donc, γ est aussi un cercle.

(2) point

Centre et Rayon :

Il est clair que le rayon est $R = \frac{1}{k(s)} = \frac{1}{2}$. (1 pt)

Quant au centre, il vérifie : $a = \tilde{\gamma}(s) + \frac{1}{k} n$.

Donc $a = (-1, 0, +1)$ (1 pt).

Le plan :

Le plan qui contient le cercle γ ~~est~~ passe par le centre et est perpendiculaire à $b = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Donc, ce plan est d'équation :

$$\langle (x+1, y, z-1), (1, 0, -1) \rangle = 0 \Leftrightarrow z - x = 2. \quad (1 \text{ pt})$$

Exercice 3 :

Soit la sphère unité $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

1- La surface S unité est une surface régulière.

On peut munir S de l'atlas :

$f_1(\theta, \varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$;

avec $(\theta, \varphi) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]0, 2\pi\right[$.

$f_2(\theta, \varphi) = (-\cos\theta\cos\varphi, -\sin\theta, -\cos\theta\sin(\varphi))$

avec $(\theta, \varphi) \in$

Si C (resp. $\tilde{C}$) désigne l'image de f_1 (resp. l'image de f_2), alors $C \cup \tilde{C} = S$.

~~On~~ De plus, on peut vérifier que :

f_1, f_2 sont de classe C^∞ et :

$$\left\| \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \right\| \neq 0 \text{ et } \left\| \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \right\| \neq 0,$$

Ce qui donne que S est une surface régulière

(2 pt)

- Première forme fondamentale :

La première forme fondamentale est de matrice

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\|^2 & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} & \|\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

avec f_1 comme définie ci-dessus.

On a donc : $ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta \, d\varphi$. (2 pt)

2- Calcul de la longueur de γ.

on a : $$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\dot{u})^2 E + 2\dot{u}\cdot\dot{v} F + (\dot{v})^2 G} \, dt$$

avec $u(t) = t$, $v(t) = \pi/4$, donc

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^{\pi/2} dt = \pi/2.$$

(1 pt)