Université de Tlemcen. le 09/04/2023
L2 Mathématiques

Partiel du module "Analyse complexe"

Exercice n° 1

Écrire $(1+i)^{1000}$ sous forme de $x+iy$.

Exercice n° 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^{z} = -2.$$

Exercice n° 3

Soit f la fonction complexe définie par

$f(z) = \frac{1-z}{1+z}$; $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$; $H = \{w \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\, w > 0\}$

Montrer que $f(D) \subset H$.

Exercice n° 4

Soit f une fonction définie dans un domaine D de $\mathbb{C}$ par $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, dérivable en tout point de D et vérifiant : $f(0) = i$ et $u(x,y) = 2x^3y - 2xy^3 + x^2 - y^2$.

Déterminer $v(x,y)$.

Exercice n° 5

Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ / |f(z)| \leq M, \ z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que f est constante.

Exercice n° 1 : 4pts ; Exercice n° 2 : 4pts, Exercice n° 3 : 4pts, Exercice n° 4 : 4pts
Exercice n° 5 : 4pts

Bon Courage

Université de Tlemcen. le 09/04/2023

L2 Mathématiques

Module: Analyse complexe.

Corrigé du partiel.

Exercice n° 1

Écrire $(1+i)^{1000}$ sous forme de $x+iy$.

Solution

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right).$$

Formule de Moivre

$$\Longrightarrow (1+i)^{1000}=(\sqrt{2})^{1000}\left(\cos 1000\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\sin 100\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$$

$$\Longrightarrow (1+i)^{1000}=2^{500}\left[\left(\cos 250\pi+2000k\pi\right)+i\sin\left(250\pi+2000k\pi\right]\right.$$

$$\Longrightarrow (1+i)^{1000}=2^{500}(1+i0)$$

Conclusion:

$$(1+i)^{1000}=2^{500}+i0$$

Exercice n° 2

Soit f la fonction complexe définie par $f(z)=\dfrac{1-z}{1+z}$;

$D=\{z\in\mathbb{C}/|z|<1\}$; $H=\{w\in\mathbb{C}/\operatorname{Re}w>0\}$.

Montrer que $f(D)\subset H$

Solution

$$w\in f(D)\Longrightarrow \exists z\in D/w=\frac{1-z}{1+z}=f(z)$$

$$\Longrightarrow f(z)=\frac{(1-x)-iy}{(1+x)+iy}=\frac{[(1-x)-iy][(1+x)-iy]}{[(1+x)+iy][(1+x)-iy]} \qquad |z|<1$$

$$=\frac{1-x^2-y^2+i(\qquad)}{(1+x)^2+y^2}\Longrightarrow \operatorname{Re}w=\operatorname{Re}f(z)=\frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}$$

$|z|<1$

$z \in D \Rightarrow |z| < 1 \Rightarrow |z|^2 < 1 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1$

$\Rightarrow 1 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow Re\, w > 0 \Rightarrow w \in H$

$\Rightarrow f(D) \subset H$.

Exercice n° 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = -2$. (1)

Solution

- $e^z = -2 \Rightarrow |e^z| = |-2| = 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |e^z| = 2 \\ |e^z| = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow e^x = 2.$
- $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \ln 2.$

D'autre par. $e^z = -2 \Rightarrow e^x(\cos y + i \sin y) = -2.$

$\xRightarrow{e^x = 2} \cos y + i \sin y = -1 \Rightarrow \cos y = -1$ et $\sin y = 0$

$\Rightarrow y = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Conclusion

Solutions de (1) $= \{x + iy = \ln 2 + i\pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice n° 4

Soit f une fonction définie dans un domaine D de $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ dérivable en tout point de D et vérifiant $f(0) = i$ et $u(x,y) = 2x^3 y - 2xy^3 + x^2 - y^2$.

Déterminer $v(x,y)$

Solution

f dérivable dans $D \Longrightarrow u$ et v dérivables dans D et vérifient les conditions de Cauchy-Riemann.

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_x = 6x^2 y - 2y^3 + 2x = v_y \\ u_y = 2x^3 - 6xy^2 - 2y = -v_x \end{array}\right.$$

$\Rightarrow v_x = -2x^3 + 6xy^2 + 2y \Rightarrow v(x,y) = -\frac{x^4}{2} + 3x^2y^2 + 2xy + g(y)$

D'autre part $v_y = 6x^2y - 2y^3 + 2x$ ①

et comme on a $v(x,y) = -\frac{x^4}{2} + 3x^2y^2 + 2xy + g(y)$,

ce qui implique $v_y = 6x^2y + 2x + g'(y)$ ②

① et ② $\Rightarrow 6x^2y - 2y^3 + 2x = 6x^2y + 2x + g'(y)$.

$\Rightarrow g'(y) = -2y^3 \Rightarrow g(y) = -\frac{y^4}{2} + C$.

Par hypothèse $f(0) = i$

$\Rightarrow i = f(0) = u(0,0) + i\,v(0,0) = i$

$\xRightarrow[v(0,0)=g(0)]{u(0,0)=0} i = i\,g(0) = i \xrightarrow{g(y) = -\frac{y^4}{2}+C} C = 1$

$g(0) = C$.

$\Rightarrow g(y) = -\frac{y^4}{2} + 1$

Conclusion:

$$v(x,y) = -\frac{x^4}{2} + 3x^2y^2 + 2xy - \frac{y^4}{2} + 1$$

Exercice n°5

Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$\exists M \in \mathbb{R}_+ / |f(z)| \le M,\ z \in \mathbb{C}$. ①

Montrer que f est constante

Solution

Soit $w \in \mathbb{C}$, d'après les formules intégrale de Cauchy on a :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz \Rightarrow |f^{(n)}(w)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz\right|$$

En considérant $C = \{z \in \mathbb{C} / |z-w| = r\}$ et en utilisant ①, nous aurons

$$|f^{n}(w)| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}\cdot 2\pi r \Rightarrow |f^{n}(w)| \le \frac{n!}{r^n}\cdot M.$$

Pour $n=1$ on a $|f'(w)| \le \frac{M}{r}$, si $r \to +\infty$ $f'(w) = 0$ par conséquent f est constante.

Université de Tlemcen. le 09/04/2023
L2 Mathématiques

Partiel du module "Analyse complex

Exercice n° 1

Écrire $(1+i)^{1000}$ sous forme de $x+iy$.

écriture de $(1+i)$: 1pt.
Reste : 3pts

Exercice n° 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$e^{z} = -2.$$

$z = x+iy$.
x : 1,5pt y : 1,5pt
Conclusion : 1.

Exercice n° 3

Soit f la fonction complexe définie par

$f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$; $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$; $H = \{w \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} w >$

Montrer que $f(D) \subset H$.

4pts.

Exercice n° 4

Soit f une fonction définie dans un domaine D de
par $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, dérivable en tout point de
et vérifiant : $f(0) = i$ et $u(x,y) = 2x^3y - 2xy^3 + x^2 - y^2$.

f dérivable ⟹ les cond. C.R vérifiées 1pt

Déterminer $v(x,y)$

v_x : 0,5pts, v_y : 0,5pts, v avec $g(y)$: 0,5pts, $g(y)$: 1pt. Conc 0,5p

Exercice n° 5

Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ / |f(z)| \leq M,\ z \in \mathbb{C}.$$

4pts.

Montrer que f est constante.

Exercice n° 1 : 4pts ; Exercice n° 2 : 4pts, Exercice n° 3 : 4pts, Exercice n° 4 : 4pts
Exercice n° 5 : 4pts

Bon Courage