Test 2 Algèbre 4 Durée 35mn 09/05/2023

On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ trois polynômes :

$$P(X) = X + 1,\ Q(X) = 1\ \ et\ \ R(X) = X^2 - 1.$$

1) Montrer que (Q, P, R) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Montrer que pour tout polynôme S de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut trouver trois éléments libres de l'espace dual $\mathbb{R}_2^*[X]$ qui lient S à Q, P et R.
3) On considère la forme quadratique T definie

sur $\mathbb{R}_2[X]$ par sa matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ relativement à la base (Q, P, R).

a) Comment qu'elle est la base (Q, P, R) pour T ?
b) Que représente le polynôme constant Q pour T ?
c) Donner les valeurs $T(P)$ et $T(R)$.
d) Déterminer L'expression de T de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$

1)2pt 2)3pts 3)a)2pts b)1pt c)2pts d)2pts.

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة أبوبكر بلقايد - تلمسان - كلية العلوم
UNIVERSITÉ ABOU-BAKR BELKAID - TLEMCEN - FACULTÉ DES SCIENCES

Année Universitaire .... السنة الدراسية | Nom .... اللقب
Examen .... الإختبار | Prénom .... الإسم
Date .... التاريخ | Né (e) le .... تاريخ الإزدياد
Signature de l'Etudiant .... إمضاء الطالب | N° Carte d'Etudiant .... رقم بطاقة الطالب

Observations ملاحظات

Note النقطة /20

Correction CC Algèbre 4

Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $P(X) = X+1$, $Q(X) = 1$, $R(X) = X^2-1$

1) (Q, P, R) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

On identifie $\mathbb{R}_2[X]$ à $\mathbb{R}^3$

$P(X) = X+1$: $P = (1,1,0)$
$Q(X) = 1$: $Q = (1,0,0)$
$R(X) = X^2-1$: $R = (-1,0,1)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow (Q, P, R)$ libre

or $\mathrm{card}\{Q, P, R\} = \dim \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow (Q, P, R)$ base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) $\forall S \in \mathbb{R}_2[X]$; $S(X) = a + bX + cX^2$

$$S = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$$

$$S = \alpha Q + \beta P + \gamma R \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha + \beta - \gamma \\ b = \beta \\ c = \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a - b + c \\ \beta = b \\ \gamma = c \end{cases} \qquad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

avec $\alpha = l_1(a, b, c) = a - b + c$

$\beta = l_2(a, b, c) = b$

$\gamma = l_3(a, b, c) = c$

$l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}_2^*[X]$

On peut écrire aussi

$l_1(S) = a - b + c = S(0) - S'(0) + \frac{1}{2} S''(0)$

$l_2(S) = - S'(0)$

$l_3(S) = \frac{1}{2} S''(0)$

3) $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$

$$Mat_{(Q,P,R)}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Soit φ_T la forme polaire de T.

On a alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_T(Q,Q) & \varphi_T(Q,P) & \varphi_T(Q,R) \\ \varphi_T(P,Q) & \varphi_T(P,P) & \varphi_T(P,R) \\ \varphi_T(R,Q) & \varphi_T(R,P) & \varphi_T(R,R) \end{pmatrix}$$

φ_T symetrique

On a : $\varphi_T(P,Q) = 0 \Rightarrow P$ et Q, T-orthogonaux

$\varphi_T(Q,R) = 0 \Rightarrow Q$ et R, T-orthogonaux

$\varphi_T(P,R) = 0 \Rightarrow P$ et R, T-orthogonaux

Donc (Q,P,R) base T-orthogonale.

b) On a $\varphi_T(Q,Q) = 0 = T(Q) \Rightarrow Q$ isotrope

c) $T(P) = \varphi_T(P,P) = -1$

$T(R) = \varphi_T(R,R) = 1$

d) $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$

$S \longmapsto T(S)$

Comme $S(x) = a + bx + cx^2$

alors $T(S) = T(a,b,c) = 0\ell_1^2 - \ell_2^2 + \ell_3^2$

où $\ell_1^2 = \ell_1^2(a,b,c)$

$\ell_2^2 = \ell_2^2(a,b,c)$

et $\ell_3^2 = \ell_3^2(a,b,c)$

On a donc $T(a,b,c) = -b^2 + c^2$

ou autrement :

$$T(S) = S'^2(0) + \frac{1}{4} S''^2(0)$$

FIN