Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L2 Mathématiques

2022/2023

Examen de contrôle d'analyse numérique 2

Corrigé

Exercice 1 sur 4 points

En utilisant la décomposition LU résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z=1 \\ 4x+7y+7z=2 \\ 2x+6y+8z=3 \end{array}\right. .$$

Solution

On pose

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Décomposition LU de la matrice A.

Initialisation

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 7 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$k=1$

$$A^{(2)}=M^{(1)}A^{(1)}$$

avec

$$M^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 0.5pt$$

alors

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow 0.5pt$$

$k=2$

$$A^{(3)}=M^{(2)}A^{(2)}$$

avec

$$M^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 0.5pt$$

alors

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = U \to 0.5pt$$

Donc

$$U = M^{(2)}A^{(2)} = M^{(2)}M^{(1)}A^{(1)} = M^{(2)}M^{(1)}A$$

Comme les matrices $M^{(2)}, M^{(1)}$ sont inversibles alors

$$\begin{aligned} A &= \left(M^{(2)}M^{(1)}\right)^{-1}U \\ &= \left(M^{(1)}\right)^{-1}\left(M^{(2)}\right)^{-1}U \end{aligned}$$

or

$$\left(M^{(1)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \left(M^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$L = \left(M^{(1)}\right)^{-1}\left(M^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to 0.5pt$$

Donc

$$A = LU,$$

où

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Résolution du système linéaire $Ax = b$.

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \to 0.5pt$$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \to 0.5pt.$$

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \to 0.5pt$$

Exercice 2 sur 8 points

On considère la matrice à coefficients réels,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 1 & \gamma \\ \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donnez des conditions suffisantes sur les variables α, β et γ pour que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.

2. Décrivez les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
3. On prend $\beta = 1$ et $\gamma = \frac{1}{2}$ pour quelles valeurs de α la méthode de Jacobi converge-t-elle?
4. Si de plus $\alpha = 0$, calculer la matrice d'itération de la méthode de Gauss-Seidel. Conclure.

Solution

1. $\rightarrow 1pt$

Pour que es méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent il suffit que la matrice A soit à diagonale strictement dominante, c'est à dire

$$\begin{cases} |\alpha| + |\beta| < 1 \\ |\alpha| + |\gamma| < 1 \\ |\beta| + |\gamma| < 1 \end{cases} . \rightarrow 1pt$$

2. $\rightarrow 2pts$

On décompose la matrice A sous la forme

$$A = D - E - F$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, E = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}, F = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La méthode de Jacobi est une méthode itérative pour la résolution des systèmes linéaires $Ax = b$, elle construit la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$,telle que pour $x^{(0)}$ donné

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + c_J, \quad k \geq 0$$

où

$$B_J = D^{-1}(E+F), c_J = D^{-1}b.$$

$\rightarrow 2pts$ La méthode de Gauss-Seidel construit la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$,telle que pour $x^{(0)}$ donné

$$x^{(k+1)} = B_{GS} x^{(k)} + c_{GS}, \quad k \geq 0$$

où

$$B_{GS} = (D-E)^{-1} F, c_{GS} = (D-E)^{-1} b.$$

3. $\rightarrow 3pts$

On considère maintenant la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ -\alpha & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -1 \\ \alpha & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Jacobi converge si et seulement si $\rho(B_J) < 1$.
On a

$$\det\left(B_J-\lambda I\right)=\lambda\left(\lambda^2-\frac{5}{4}+\alpha^2\right),$$

ce qui donne les valeurs propres de B_J, $\lambda_1=0,\lambda_2=\frac{1}{2}\sqrt{5-4\alpha^2},\lambda_3=-\frac{1}{2}\sqrt{5-4\alpha^2}$ dans le cas où $5-4\alpha^2\geq 0$, c'est à dire $\alpha\in\left[-\frac{1}{2}\sqrt{5},\frac{1}{2}\sqrt{5}\right]$
et $\lambda_1=0,\lambda_2=i\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2-5},\lambda_3=-i\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2-5}$ dans le cas où $5-4\alpha^2<0$.
Le rayon spectral de B_J, $\rho\left(B_J\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\left|5-4\alpha^2\right|}$.

$$\begin{aligned}
\rho\left(B_J\right) &< 1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sqrt{\left|5-4\alpha^2\right|}<1\Leftrightarrow\left|5-4\alpha^2\right|<4\\
&\Leftrightarrow -4<5-4\alpha^2<4\Leftrightarrow-9<-4\alpha^2<-1 && (1)\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{4}<\alpha^2<\frac{9}{4}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\alpha^2-\frac{9}{4}<0\\ \frac{1}{4}-\alpha^2<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}-\frac{3}{2}<\alpha<\frac{3}{2}\\ \alpha<-\frac{1}{2}\text{ et }\alpha>\frac{1}{2}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \alpha\in\left]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[. \qquad\rightarrow 1pt && (2)
\end{aligned}$$

4. $\rightarrow 2pts$
Maintenant si $\alpha=0$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix},$$

alors

$$B_{GS}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{5}{4}\end{pmatrix}\qquad\rightarrow 1pt$$

Les valeurs propre de B_{GS} sont $\lambda_1=\lambda_2=0$ et $\lambda_3=\frac{5}{4}$.
D'où $\rho\left(B_{GS}\right)=\frac{5}{4}>1$.
La méthode de Gauss-Seidel ne converge pas.

Exercice 3 sur 4 points

1. Soit A une matrice $n\times n$ inversible que l'on pertube par une matrice δA telle que $\left\|A^{-1}\right\|\left\|\delta A\right\|<1$ pour une norme matricielle induite.
On note x la solution de $Ax=b$ et y la solution de $\left(A+\delta A\right)y=b$. Donner une borne de

$$\frac{\left\|y-x\right\|}{\left\|y\right\|}.$$

2. Calculer $\left\|A\right\|_\infty$ et $\left\|A\right\|_1$ pour $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&6\end{pmatrix}$.

Solution

1. $\rightarrow 2pts$
A partir des équations

$$\left\{\begin{array}{c}\left(A+\delta A\right)y=b\\ Ax=b\end{array}\right.$$

on obtient

$$(A+\delta A)\,y = Ax$$

et de là

$$A\,(y-x) = \delta A y$$

Comme A est inversible alors

$$y-x = A^{-1}\delta A y$$

et par suite

$$\|y-x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\delta A\| \|y\|$$

et

$$\frac{\|y-x\|}{\|y\|} \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\delta A\| < 1.$$

2. $\rightarrow 2pts$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max\{3,10\} = 10.$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \max\{5,8\} = 8.$$

Exercice 4 sur 4 points

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 & 0 \\ 2 & \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

1. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel ε, la matrice A est symétrique définie positive.
2. Pour $\varepsilon = 4$, déterminer la factorisation de Cholesky de A.

Solution

1.$\rightarrow 2pts$

Il est clair que A est symétrique.

Pour que A soit définie positive il faut et il suffit que les mineurs principaux dominant soient strictement positifs.

ce qui veut dire

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon > 0 \\ \varepsilon^2 - 4 > 0 \\ \varepsilon\,(\varepsilon^2 - 5) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \varepsilon > 0 \\ \varepsilon > 2 \\ \varepsilon > \sqrt{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \varepsilon > \sqrt{5}.$$

2. $\rightarrow 2pts$

$\varepsilon = 4 > \sqrt{5}$, donc la matrice A est définie positive, elle admet une décomposition de Cholesky $A = BB^T$, avec B une matrice triangulaire inférieure à diagonale positive.

Calcul de la matrice B

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \sqrt{4} = 2, \\
b_{21} &= \frac{2}{2} = 1, \\
b_{31} &= 0, \\
b_{22} &= \sqrt{4-1} = \sqrt{3}, \\
b_{32} &= \sqrt{\frac{1}{3}}, \\
b_{33} &= \sqrt{4 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{11}{3}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{11}{3}} \end{pmatrix}.$$