

Licence 2ème année MATH, 2022–2023

ANALYSE3

Fiche de TD 2 : Les séries de fonctions.

Exercice 1. Déterminer le domaine de convergence simple des séries de fonctions $\sum u_n(x)$ définies par

$$\begin{aligned}
 1) \quad u_n(x) &= \frac{1}{1+n^2x}, & 2) \quad \begin{cases} u_1(x) = x \\ u_n(x) = x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \end{cases} \\
 3) \quad u_n(x) &= \frac{x^n}{(1-x)^n}, & 4) \quad u_n(x) = \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n.
 \end{aligned}$$

Exercice 2. Etudier la convergence normale, uniforme et simple des séries de fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
 1) \quad \sum \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} + \cos(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, & \quad 2) \quad \sum x^\alpha e^{-nx}, \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0, \\
 3) \quad \sum \frac{3^n}{nx} \cos^3\left(\frac{x}{3^n}\right), \quad x \in [1, 2], & \quad 4) \quad \sum \frac{(x \ln(x))^n}{n!}, \quad x \in]0, 1[.
 \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit la série de fonctions de terme général

$$u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2 + x^2}.$$

- 1) Trouver le domaine D de convergence de la série $\sum u_n(x)$.
- 2) Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur D .
- 3) En déduire que la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur D .
- 4) Montrer que la somme $S(x)$ est dérivable sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$.

Exercice 4. On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{x^n \ln(x)}{n} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge normalement sur $[0, 1]$ et en déduire que

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right) = - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

- 2) Sachant que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer la somme de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

Exercice 5. (Facultatif)

Etudier la convergence normale, uniforme et simple des séries de fonctions suivantes

$$1) \sum \frac{1}{n^x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 2) \sum \frac{\sin(nx)}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 3) \sum \frac{(-1)^n}{nx + (-1)^n}, \quad x \in]2, +\infty[.$$

Exercice 6. (Facultatif)

Soit la série de fonction de terme général suivant

$$u_n(x) = (\alpha e^{-\alpha nx} - \beta e^{-\beta nx}), \quad \alpha, \beta > 0 \quad \text{et} \quad \alpha \neq \beta.$$

1) Etudier la convergence simple de la série $\sum u_n(x)$.

2) Calculer sa somme $S(x)$.

Exercice 7. (Facultatif)

1) Montrer que la série de fonctions

$$\sum \frac{1}{(1 + nx)(nx)}$$

converge simplement sur $]0, +\infty[$ et converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$ fixé.

2) Montrer que sa somme $S(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8. (Facultatif)

Soit la série de fonctions

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}.$$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1, +1[$.

2) Calculer $f'(x)$ et en déduire que

$$f(x) = \arctan \left(\frac{x \sin(x)}{1 - x \cos(x)} \right).$$

3) Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}.$$