Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Licence 2ème année MATH, 2022–2023

ANALYSE3
Fiche de TD 1 : Les séries numériques.

Exercice 1. Trouver la somme (S_n) des n premiers termes de la série, puis calculer la somme S pour chacune des séries suivantes

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{7^{n-2}}$$

$$3)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{e^{-n}(\pi\alpha)^n}, \alpha > 0, \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+n(n+1)}\right)$$

Exercice 2. Etudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum \frac{n!}{n^n}, \qquad 2)\ \sum \frac{1}{\ln(n)}, \qquad 3)\ \sum \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}},$$

$$4)\ \sum \frac{n^n}{e^n n!}, \qquad 5)\ \sum \frac{2^n}{\cosh(n)}, \qquad 6)\ \sum (1-\cos(\frac{\pi}{n})),$$

$$7)\ \sum \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin(x)}dx, \qquad 8)\ \sum \frac{1}{n^2 \ln^3(n)}, \qquad 9)\ \sum \ln\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+n+1}\right).$$

Exercice 3. 1) Montrer que la série de terme général

$$u_n = n^{-1} + \ln(n) - \ln(n+1)$$

est convergente.
2) En déduire que la suite

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

admet une limite l. (Cette limite s'appelle la constante d'Euler).

Exercice 4. Etudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum \frac{(-1)^n + k}{n^2+1}, k \in \mathbb{R}, \qquad 2)\ \sum \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n},$$

$$3)\ \sum \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\ln(n)}, \qquad 4)\ \sum \arctan(\frac{1}{n})\sin(n).$$

Exercice 5. Déterminer pour quelle valeurs de α la série suivante converge

$$\sum_{n\geq 0} \left(1 - n\sin(\frac{1}{n})\right)^{\alpha}.$$

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

1) Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$.
2) En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que

$$n! \sim_\infty k n^n e^{-n}\sqrt{n}.$$

Exercice 7. (Facultatif)Etudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad 2) \sum \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}, \qquad 3) \sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}},$$
$$4) \sum \frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}), \qquad 5) \sum e^{-\sqrt{2+n}}, \qquad 6) \sum \frac{e^{-2n}+\sqrt{n}}{n^2+1},$$
$$7) \sum \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n, \qquad 8) \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}.$$

Exercice 8. (Facultatif)Etudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum \frac{(-1)^n}{n}\arctan(\frac{1}{n}), \qquad 2) \sum \frac{(-1)^n}{n+2\sin(n)},$$
$$3) \sum \frac{\sin(2n)}{n^2-n+1}, \qquad 4) \sum \sin(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}).$$

Exercice 9. (Facultatif)Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ avec

$$u_n = \ln(\cos(\frac{1}{2^n}))$$

est convergente et calculer sa somme.

Exercice 10. (Facultatif)
1) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles avec $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0, v_n \geq 0$
On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes. Quelle est la nature de la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$?

2) Soit $(u_n)_n$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$. On pose

$$v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}.$$

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes.