

2<sup>ème</sup> année MATH- Semestre 1  
Examen de rattrapage : Analyse 3  
Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

**Exercice 1.** ( 4.5 Pts)

Suivant les valeurs du paramètre  $\alpha$ , étudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n\alpha}, \quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + \alpha n^3}$$

**Exercice 2.** ( 6 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n.$$

- 1) Déterminer le rayon de convergence  $R$ .
- 2) En déduire le domaine de convergence.
- 3) Calculer la somme de la série entière  $f$ .

4) En déduire la somme de la série numérique  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3 2^{-n}}{(n-1)(n-2)}$

**Exercice 3.** ( 5 Pts)

Soit la fonction  $f$ , impaire,  $2\pi$ -périodique définie sur  $[0, \pi]$  par  $f(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$ .

- 1) Tracer le graphe de  $f$  sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .
- 2) Déterminer la série de Fourier associée à  $f$ , notée  $S_f$ .
- 3) En déduire la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}.$$

**Exercice 4.** ( 4.5 Pts)

Etudier la nature de l'intégrale impropre suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx$$

2<sup>ème</sup> année MATH - Semestre 1  
 Corrigé de l'examen de rattrapage : Analyse 3  
 Durée : 1h30mn

**Exercice 1.** ( 4.5 Pts)

1) On pose  $u_n = ne^{-n\alpha}$  et appliquons le critère de Cauchy. On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} e^{-\alpha} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} e^{-\alpha} \\ &= e^{-\alpha} \quad (1\text{Pt}) \quad \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \right). \end{aligned}$$

Si  $\alpha < 0$ , alors  $e^{-\alpha} > 1$  et la série converge. (0.5 Pt)

Si  $\alpha > 0$ , alors  $e^{-\alpha} < 1$  et la série diverge. (0.5 Pt)

Si  $\alpha = 0$ , alors on ne peut rien conclure par le critère de Cauchy.

pour  $\alpha = 0$ , on a  $u_n = n \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Donc, dans ce cas, la série diverge. (0.5 Pt)

2) On remarque que pour  $\alpha \neq 0$ , on a

$$\frac{\sqrt{n}}{1 + \alpha n^3} \sim \frac{\sqrt{n}}{\alpha n^3} = \frac{1}{\alpha n^{5/2}}. \quad (0.5\text{Pt})$$

Puisque  $\sum \frac{1}{n^{5/2}}$  converge (série de Riemann), alors par le critère d'équivalence, la série  $\sum \frac{\sqrt{n}}{1 + \alpha n^3}$  converge. (0.5 Pt)

Pour  $\alpha = 0$ ,  $\sum \sqrt{n}$  diverge car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ . (1 Pt)

**Exercice 2.** ( 6 Pts)

1) Le rayon de convergence  $R$  est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)^2 (n-1)(n-2)}{n(n-1)} \cdot \frac{n^2}{n^2} \right| = 1.$$

Donc,  $R = 1$ . (0.5 Pt)

2) On sait que si  $|x| < R$ , alors la série entière converge.

Si  $|x| > R$ , alors la série entière diverge.

Si  $|x| = R$ , alors soit  $x = 1$  ou  $x = -1$ .

Pour  $x = 1$ , on a la série numérique  $\sum \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}$  qui diverge car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} = 1 \neq 0$ . (0.25 Pt)

Pour  $x = -1$ , on a la série numérique  $\sum \frac{(-1)^n n^2}{(n-1)(n-2)}$  qui diverge car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n-1)(n-2)} \neq 0$ . (0.25 Pt)

Ainsi, le domaine de convergence est  $D_f = ]-1, 1[$ . (0.25 Pt)

3) On remarque que

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} &= a + \frac{b}{n-1} + \frac{c}{n-2} \\ &= \frac{an^2 - an + bn - 2an + 2a - 2b + cn - c}{(n-1)(n-2)}. \end{aligned}$$

Par identification, on a

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 4. \quad (0.75\text{Pt})$$

Ainsi, pour  $x \in D_f$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n = \sum_{n=3}^{+\infty} \left( 1 - \frac{1}{n-1} + \frac{4}{n-2} \right) x^n \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} + 4 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n-2} \\ &= \frac{x^3}{1-x} - x \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} + 4x^2 \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} \\ &= \frac{x^3}{1-x} - x(-\ln(1-x) - x) + 4x^2(-\ln(1-x)) \\ &= \frac{x^2}{1-x} + x(1-4x)\ln(1-x) \quad (3\text{Pts}) \end{aligned}$$

4) On remarque que pour  $x \in D_f$ ,

$$f'(x) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3}{(n-1)(n-2)} x^{n-1}.$$

D'autre part,

$$f'(x) = \frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} + (1-8x)\ln(1-x) - \frac{x(4-x)}{1-x}.$$

En remplaçant  $x = \frac{1}{2}$ , on obtient

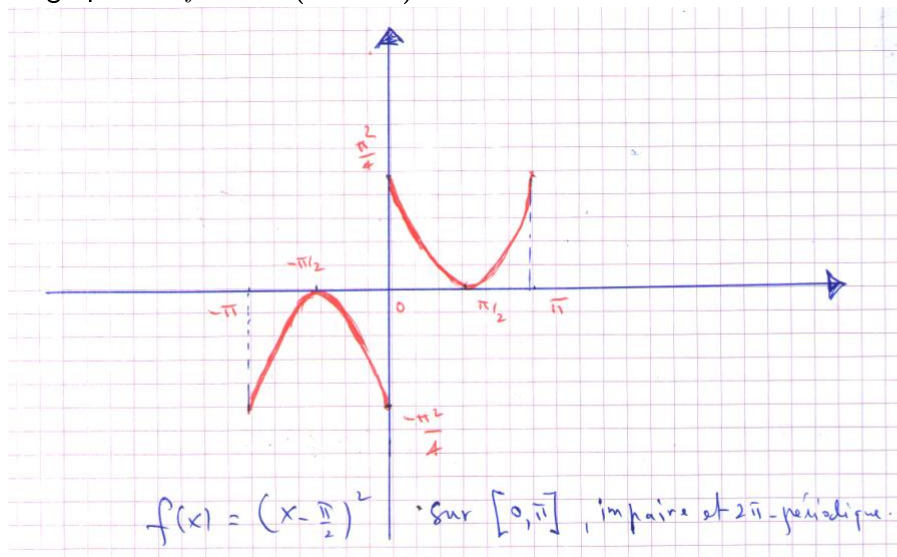
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3}{(n-1)(n-2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{13}{2} + 3\ln(2).$$

Ainsi,

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^3 2^{-n}}{(n-1)(n-2)} = \frac{13}{4} + \frac{3}{2}\ln(2). \quad (1\text{Pt})$$

### Exercice 3. ( 5 Pts)

1) Le graphe de  $f$  est (0.5 Pt)



2) Puisque  $f$  est impaire, alors  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$ . (0.25 Pt)

D'autre part,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(nx) dx \quad (0.25 \text{Pt})$$

On utilise une intégration par parties,  $(\int uv' = uv] - \int u'v)$ . On pose

$$\begin{cases} u = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 & \Rightarrow u' = 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \\ v' = \sin(nx) & \Rightarrow v = -\frac{\cos(nx)}{n}. \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left( \left[ -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \left[ \left( -\frac{\pi^2}{4n} (-1)^n + \frac{\pi^2}{4n} \right) \right] + \frac{2}{n} \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(nx) dx \right) \quad (1 \text{Pt}) \end{aligned}$$

En utilisant une deuxième intégration par parties avec

$$\begin{cases} u = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \Rightarrow u' = 1, \\ v' = \cos(nx) & \Rightarrow v = \frac{\sin(nx)}{n}, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{4n} (1 - (-1)^n) + \frac{2}{n} \left( \left[ \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(nx) \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin(nx) dx \right) \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi^2}{4} (1 - (-1)^n) + \frac{2}{n^3} [\cos(nx)]_0^\pi \right) \\ &= \frac{2}{\pi} (1 - (-1)^n) \left( \frac{\pi^2}{4n} - \frac{2}{n^3} \right). \quad (1 \text{Pt}) \end{aligned}$$

On remarque que si  $n$  est pair, alors  $b_{2k} = 0$ .

Si  $n$  est impaire, alors  $b_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\pi^2}{4(2k+1)} - \frac{2}{(2k+1)^3} \right]$

Ainsi, la série de Fourier associée à  $f$  est

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{\pi^2}{4(2n+1)} - \frac{2}{(2n+1)^3} \right] \sin((2n+1)x), \quad \text{pour } x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad (1 \text{Pt})$$

$$S_f(x) = 0, \quad \text{pour } x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

3) En remplaçant  $x = \frac{\pi}{2}$ , on a

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{\pi^2}{4(2n+1)} - \frac{2}{(2n+1)^3} \right] (-1)^n = 0.$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^2}{8} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}. \quad (1 \text{Pt})$$

#### Exercice 4. (4.5 Pts)

On remarque que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x(x^2+1)}} dx$  est impropre en  $+\infty$  et en 0.

Posons

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x(1+x^2)}} dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x(1+x^2)}} dx \quad (0.5 \text{Pt})$$

Pour  $I_1$ , on sait que  $\sin(x) \sim_0 x$ . Donc,

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)} \sim \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}. \quad (1\text{Pt})$$

Puisque  $\int_0^1 \sqrt{x} dx$  converge, alors  $I_1$  converge par le critère d'équivalence. (1 Pt)

Pour  $I_2$ , on remarque que

$$\left| \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)} \sim \frac{1}{x^{5/2}} \quad (1\text{Pt})$$

Sachant que  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/2}}$  converge, alors  $I_2$  converge. Ainsi,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx$  (1 Pt)