Département de Mathématiques
Faculté des Sciences – UABB Tlemcen 20-06-23

Examen de Rattrapage Algèbre 3 Durée : 1H30

Exercice 1 : Soit A une matrice carrée réelle d'ordre 3 associée à un endomorphisme f définie par : Pour (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$:

f(x, y, z) = (x, -x+2y+z, 2z).

1- Déterminer le polynôme minimal de f. Que déduisez-vous quant à la diagonalisation de f ?
2- Montrer, sans calcul, qu'il existe deux vecteurs non nuls u et v vérifiant f(u) =2u et f(v) =u+2v.
3- Soit un vecteur w tel que f(w) =w. Montrer que (w, u, v) est une base de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de f dans cette base qu'on notera par B.
4- Vérifier que A et B sont semblables puis calculer A^{2023}.

(10 points)

Exercice 2 : Soit A la matrice carrée réelle donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & x-2 & 2 \end{pmatrix}$$ avec x un réel.

Pour quelles valeurs du réel x, A est-elle diagonalisable ? **(5 points)**

Exercice 3 : Soit f un endomorphisme, d'un IR-ev E de dimension finie, défini par $f^2 + f + id_E = 0_E$. Soit u un vecteur de E est F un sous espace vectoriel de E engendré par la famille {u, f(u)}.

1- Montrer que {u, f(u)}, u non nul, est une base de F.
2- Montrer que F est stable par f. **(5 points)**

Corrigé Algèbre 3 (Rattrapage) — 20-6-23

Exo 1 10 pts :

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorphisme

$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (x, -x+2y+z, 2z)$

1) Polynôme caractéristique :

$P_f(\lambda) = \det(f-\lambda id)$

0,5 $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_3) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$

P_A est un polynôme annulateur de A

Calculons : $(2I-A)(I-A)$:

A matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$0{,}5 \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

(Remarque : $f(e_2) = 2e_2$, $f(e_3) = e_2 + 2e_3$)

$$(A-2I)(A-I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O_{M_3(\mathbb{R})}$$

$\Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)$ n'est pas annulateur de A

0,5 $\Rightarrow (2-\lambda)^2(1-\lambda)$ est le polynôme minimal de A.

0,5 $\Rightarrow$ f n'est pas diagonalisable car les racines du polynôme minimal ne sont pas simples.

2) Comme 2 est v.p de A (ou de f) alors

0,5 $\exists u \neq 0$ dans $\mathbb{R}^3$ / $f(u) = 2u$

Comme A est non diagonalisable, alors $E_2(A)$, sous espace propre de A associé à 2 est engendré par u.

0,5 $(\dim E_2(A) = 1) \neq (m(2) = 2)$ donc $\exists v \in \mathbb{R}^3_*$ / $f(v) = u + 2v$

On remarque que : (selon la matrice A)

$f(e_2) = 2e_2$, $e_2 = (0,1,0)$

$f(e_3) = e_2 + 2e_3$, $e_3 = (0,0,1)$

0,5 Donc $\exists u = e_2 \ / \ f(u) = 2u$

0,5 et $\exists v = e_3 \ / \ f(v) = u + 2v$

3) Soit $w \in \mathbb{R}^3_* \ / \ f(w) = w$

$w = (x, y, z)$

$$f(w) = w \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ -x + 2y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

0,5 Donc prenons $w = (1,1,0)$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w & u & v \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = 1 \neq 0 \Leftrightarrow (w, u, v) \text{ libre.}$$

or $\operatorname{card}(w,u,v) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

0,5 $\Rightarrow (w,u,v)$ base de $\mathbb{R}^3$.

Soit B la matrice de f dans (w,u,v) :

0,5 On a :
$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Aw & Au & Av \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} w \\ u \\ v \end{array}$$

4) A et B semblables

soit P matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (w,u,v)

on a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\det P = 1 \neq 0$
$\Rightarrow P^{-1}$ existe.

Vérifions qu'on a : $B = P^{-1} A P$ ou $PB = AP$.

$$PB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

0,5 $$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5 $$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a bien $PB = AP$ soit $B = P^{-1}AP$.

0,5 Donc A et B semblables.

Calcul de A^{2023} (on calcule A^n, $n = 2023$)

On a : $B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$

$\Leftrightarrow A^n = PB^nP^{-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

or 0,5 $$B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= N}$$

0,5 $$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow N$: nilpotente.

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow DN = ND$$

0,5

$$B^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k D^{n-k}$$

$$= C_n^0 I_3 D^n + C_n^1 N D^{n-1} + 0 + \dots + 0$$

0,5

$$= D^n + n N D^{n-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$A^n = P B^n P^{-1}$ avec $P^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0,5

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad (n = 2023)$$

Exo2 5pts

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & x-2 & 2 \end{pmatrix} \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

$P_A(x) = \det(A - \lambda I_3)$

0,5 $= -\lambda(x-\lambda)(2-\lambda)$

(0,5) $Sp(A) = \{0, x, 2\}$

- Si $x = 0$ alors $P_A(\lambda) = \lambda^2(2-\lambda)$;

$\lambda = 0$ est v.p double $\Rightarrow m(0) = 2$

0,5 $E_0(A) = \{u \in \mathbb{R}^3 \,/\, Au = 0\}$; $u = (x, y, z)$:

0,5 $Au = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = z = 0$

Donc $u = (x, y, z) = x(1, 0, 0)$

0,5 $\Rightarrow E_0(A) = \text{Vect}(1, 0, 0)$

$\dim E_0(A) = 1 \neq m(0)$

$\Rightarrow$ pour $x = 0$, A non diagonalisable

- Si $x = 2$ alors $P_A(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2$

$\lambda = 2$ est v.p double $\Rightarrow m(2) = 2$

0,5 $E_2(A) = \{u \in \mathbb{R}^3 \,/\, Au = 2u\}$; $u = (x, y, z)$

0,5 $Au = 2u \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x$

$u = (x, y, z) = (x, 2x, z)$

0,5 $= x(1,2,0) + z(0,0,1)$

$\Rightarrow E_2(A) = \text{Vect}((1,2,0),(0,0,1))$

$\Rightarrow \dim E_2(A) = 2 = m(2)$

$\Rightarrow$ A diagonalisable pour $x = 2$.

En conclusion :

- 0,5 si $x \neq 0$ et $x \neq 2$ on a 3 v.p distincts $\Rightarrow$ A est diagonalisable.
- 0,5 si $x = 2$, $\dim E_2(A) = m(2)$ $\Rightarrow$ A diagonalisable
- 0,5 si $x = 0$, $\dim E_0(A) \neq m(0)$ $\Rightarrow$ A non diagonalisable.

Exo3 5pts f endo de E, $\mathbb{R}$-ev. ($\dim E < +\infty$)

$f^2 + f + id_E = 0_E$

$u \in E$ et $F = \text{Vect}(u, f(u))$

1) $\{u, f(u)\}_{u \neq 0}$ base de F.

0,5 Soit λ v.p de f $\Rightarrow \exists u \neq 0 \ / \ f(u) = \lambda u$

$\Rightarrow \lambda^2 u + \lambda u + u = 0$

0,5 $\Rightarrow (\lambda^2 + \lambda + 1)u = 0$

0,5 or $u \neq 0$ donc $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ pas de sol. dans $\mathbb{R}$.

0,5 ---------- $\Rightarrow \lambda$ n'existe pas

0,5 Si on suppose que $\dim F = 2$ $\Leftrightarrow \{u, f(u)\}$ libre $\Rightarrow \{u, f(u)\}$ base de F.

2) F stable par f.

Soit $v \in F$. Montrons que $f(v) \in F$.

0,5 $v \in F \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid v = \alpha u + \beta f(u)$

$$\Downarrow$$

0,5 $f(v) = f(\alpha u + \beta f(u))$

(0,5) comme f est linéaire,

on a : $f(v) = \alpha f(u) + \beta f^2(u)$

0,5 $= \alpha f(u) + \beta[-f(u) - u]$

$= (\alpha - \beta) f(u) - \beta u$

0,5 $\Rightarrow f(v)$ s'écrit en fonct. des éléments u et $f(u)$ de la base de F

0,5 $\Rightarrow f(v) \in F \Rightarrow$ F stable par f.

FIN