Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L2 Mathématiques

2022/2023

Examen de rattrapage d'analyse numérique 1
corrigé

Exercice 1 (5 points)

1. Vérifier que pour tous trois points distincts x_0, x_1 et x_2.

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_0, x_1]$$

2. On suppose que $x_1 = x_0 + h$ et $x_2 = x_1 + h$ avec $h > 0$. Calculer $f[x_0, x_1, x_2]$.

Etant donné l'ensemble de données suivant

$$\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{3} = \{(1, -1), (2, 0), (3, 2), (4, 3)\}$$

3. Construire le polynôme d'interpolation passant par les points $(x_i, y_i)_{i=0}^{3}$ sous la forme de Newton.

Solution

1.

On a d'une part

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{(x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_1)) - (x_2 - x_1)(f(x_1) - f(x_0))}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)} \\
&= \frac{(x_1 - x_0) f(x_2) - (x_2 - x_0) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
f[x_2, x_0, x_1] &= \frac{f[x_0, x_1] - f[x_2, x_0]}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} - \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{(x_2 - x_0)(f(x_1) - f(x_0)) - (x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_0))}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
&= \frac{-(x_1 - x_0) f(x_2) + (x_2 - x_0) f(x_1) - (x_2 - x_1) f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
&= \frac{(x_1 - x_0) f(x_2) - (x_2 - x_0) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_1)}.
\end{aligned}$$

2.

Si les points sont équidistants,

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{hf(x_2) - 2hf(x_1) + hf(x_0)}{(2h)(h)(h)} = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h^2}.$$

3.

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
$x_0 = 1$	-1			
		1		
$x_1 = 2$	0		$\frac{1}{2}$	
		2		$-\frac{1}{3}$
$x_2 = 3$	2		$-\frac{1}{2}$	
		1		
$x_3 = 4$	3			

$$P_3(x) = -1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - \frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3)$$

Exercice 2 (5 points)
On considère la fonction $f(x) = e^x - 4x^2$.
1. Montrer qu'il existe un zéro α pour la fonction f dans $[4,5]$ et qu'il est unique.
2. Montrer que la méthode du point fixe $x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ ne converge pas vers α.
3. Déterminer une méthode de point fixe qui converge vers α. Justifier.
4. Cette équation admet aussi une racine entre $x = 0$ et $x = 1$.Montrer que la méthode du point fixe $x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ converge vers cette racine si x_0 est choisi dans l'intervalle $[0,1]$.
On donne les valeurs suivantes: $e^{0.5} = 1.6487, e^1 = 2.7183, e^2 = 7.3891,\ e^4 = 54.5982,\ e^5 = 148.4132$.
Solution (sur 5 points)
1. f est une fonction continue sur $[4,5]$ avec $f(4) = e^4 - 64 < 0$ et $f(5) = e^5 - 100 > 0$, Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de α dans $[4,5]$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus $f'(x) = e^x - 8x > 0,\ \forall x \in [4,5]$ alors f est strictement croissante dans $[4,5]$ et α est unique.
2. $\forall x \in [4,5], f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 4x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$.On pose $g(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}},\ g'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}},\ g'(x)$ étant positive et croissante alors $|g'(x)| \geq g'(4) = \frac{7.3891}{4} > 1, \forall x \in [4,5]$ et donc la méthode ne converge pas vers α.
3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 4x^2 \Leftrightarrow x = \ln(4x^2) = 2\ln(2x)$. On pose $g_1(x) = 2\ln(2x) \Rightarrow g_1'(x) = \dfrac{2}{x}$
De plus $\forall x \in [4,5], |g_1'(x)| \leq \frac{1}{2} < 1$ alors la méthode de point fixe définie par la fonction d'itération g_1 converge vers α.
4. La fonction g est une fonction croissante sur $[0,1]$,avec $g(0) = \frac{1}{2}, g(1) = \frac{e^{0.5}}{2} < 1$ alors $g([0,1]) \subset [0,1]$.
Comme $\max\limits_{x \in [0,1]} |g'(x)| = \frac{e^{0.5}}{4} < 1$ alors $\forall x_0 \in [0,1]$,la méthode du point fixe $x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ converge vers la racine de $f(x)$ dans l'intervalle $[0,1]$.
Exercice 3
Soit $h > 0$ et étant données les valeurs $f(0), f(h)$ et $f(3h)$ de la fonction $f(x)$.
1- Construire le polynôme d'interpolation $p(x)$ de la fonction f aux points $x = 0, h$ et $3h$ sous la forme de Lagrange.
2- Calculer l'approximation $f'(x) \simeq p'(x)$.
3- En supposant que la fonction f est suffisament régulière, donner une borne de l'erreur $|f'(0) - p'(0)|$.
Solution

1- On pose $x_0 = 0, x_1 = h$ et $x_2 = 3h$. Les polynômes de la base de Lagrange aux points x_0, x_1, x_2 sont:
$L_0(x) = \frac{(x-h)(x-3h)}{(-h)(-3h)} = \frac{1}{3h^2}(x-h)(x-3h)$
$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3h)}{(h-0)(h-3h)} = -\frac{1}{2h^2}x(x-3h)$
$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-h)}{(3h-0)(3h-h)} = \frac{1}{6h^2}x(x-h)$
D'où $p(x) = \frac{f(0)}{3h^2}(x-h)(x-3h) - \frac{f(h)}{2h^2}x(x-3h) + \frac{f(3h)}{6h^2}x(x-h)$.
2- $p'(x) = \frac{f(0)}{3h^2}(x-h+x-3h) - \frac{f(h)}{2h^2}(x+x-3h) + \frac{f(3h)}{6h^2}(x+x-h) = \frac{2x-4h}{3h^2}f(0) - \frac{2x-3h}{2h^2}f(h) + \frac{2x-h}{6h^2}f(3h)$
Donc $f'(x) \simeq \frac{2x-4h}{3h^2}f(0) - \frac{2x-3h}{2h^2}f(h) + \frac{2x-h}{6h^2}f(3h)$.
3- On a $f(x) - p(x) = \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}x(x-h)(x-3h), \xi(x)$ entre 0 et $3h$. Une dérivation par rapport à x donne:
$f'(x) - p'(x) = \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}[(x-h)(x-3h) + x(x-3h) + x(x-h)] + \frac{d}{dx}\left[\frac{f^{(3)}(\xi(x))}{3!}\right]x(x-h)(x-3h)$.
Pour $x = 0$
$f'(0) - p'(0) = \frac{f^{(3)}(\xi(0))}{3!}[(-h)(-3h)] = \frac{f^{(3)}(\xi(0))}{2}h^2, \xi(0)$ entre 0 et $3h$.
D'où en supposant f de classe $C^3[0,3h]$
$|f'(0) - p'(0)| \le \frac{\left|f^{(3)}(\xi(0))\right|}{2}h^2 \le \frac{M}{2}h^2$, $M = \sup_{x\in[0,3h]}\left|f^{(3)}(x)\right|$, $f^{(3)}$ est continue donc bornée sur $[0,h]$.
finalement
$|f'(0) - p'(0)| \le \frac{M}{2}h^2$.

Exercice 4 (sur 5 points)

Déterminer la valeur de $\alpha \in [0,1]$, telle que le degré de précision de la formule de quadrature

$$Q(f) = \frac{2}{3}f(\alpha) - \frac{1}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}f(1-\alpha)$$

pour approcher $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$, ait un degré de précision aussi élevé que possible. Quel est le degré de précision de cette quadrature?

Solution

On pose $f(x) = x^k, k = 0, 1, ...$
pour $k = 0$

$$I(1) = \int_0^1 1dx = 1$$

$$Q(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

On voit que $I(1) = Q(1)$
pour $k = 1$

$$I(x) = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

$$Q(x) = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(1-\alpha) = \frac{1}{2}$$

de même $I(x) = Q(x)$ est vérifiée.

pour $k = 2$

$$I(x^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$Q(x^2) = \frac{2}{3}\alpha^2 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3}(1-\alpha)^2 = \frac{4}{3}\alpha^2 - \frac{4}{3}\alpha + \frac{7}{12}$$

L'égalité

$$I(x^2) = Q(x^2)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{4}{3}\alpha^2 - \frac{4}{3}\alpha + \frac{7}{12} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$16\alpha^2 - 16\alpha + 3 = 0$$

qui admet pour solutions $\alpha_1 = \dfrac{3}{4} \in [0,1]$ et $\alpha_2 = \dfrac{1}{4} \in [0,1]$.

On obtient la formule de quadrature (pour $\alpha_1 = \dfrac{3}{4}$ et $\alpha_2 = \dfrac{1}{4}$).

$$Q(f) = \frac{2}{3}f(\frac{1}{4}) - \frac{1}{3}f(\frac{1}{2}) + \frac{2}{3}f(\frac{3}{4})$$

pour $k = 3$

$$I(x^3) = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$Q(x^3) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

pour $k = 4$

$$I(x^4) = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} Q(x^4) &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^4 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4 \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(1 - 2^4 + 3^4\right) = \frac{2 \times 74}{3 \times 4^4} = \frac{4 \times 37}{3 \times 4^4} \\ &= \frac{37}{192} \neq \frac{1}{5} = I(x^4) \end{aligned}$$

En conclusion, le degré de précision de la formule de quadrature est 3.