Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Histoire des Mathématiques* - Épreuve de Rattrapage.
Mercredi 21/06/2023 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1 : (04pts) Effectuer, selon la méthode de l'Égypte antique, les opérations suivantes :

$$A = 8 \times 13 \qquad , \qquad B = 5 \times 17$$

Exercice 2 : (07pts) On considère l'équation suivante

$$(A) \qquad x^3 = 6\,x + 4$$

1. En suivant la méthode de Omar AL-KHAYYAM, montrer que cette équation admet une solution (positive) unique. (Indication : On pourra utiliser l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole)
2. Appliquer ensuite la méthode de Cardan pour calculer cette solution.

Exercice 3 : (09pts) En utilisant la méthode de FERRARI, résoudre complètement l'équation suivante

$$(B) \qquad x^4 + 4\,x + 3 = 0$$

2ème année de Licence de Mathématiques - Semestre 1 - 2022/2023

Module : "Histoire des Mathématiques" - Rattrapage - Corrigé.

Exercice 1 : (04pts) On a, selon la méthode de l'Égypte antique,

* $A = 17 \times 5 = \boxed{85}$

← 1	5
2	10
4	20
8	40
← 16	80
17	85

2pts

* $A = 8 \times 13 = \boxed{104}$

← 1	8
2	16
← 4	32
← 8	64
13	104

2pts

Exercice 2 : (07pts) (A) : $x^3 = 6x + 4$

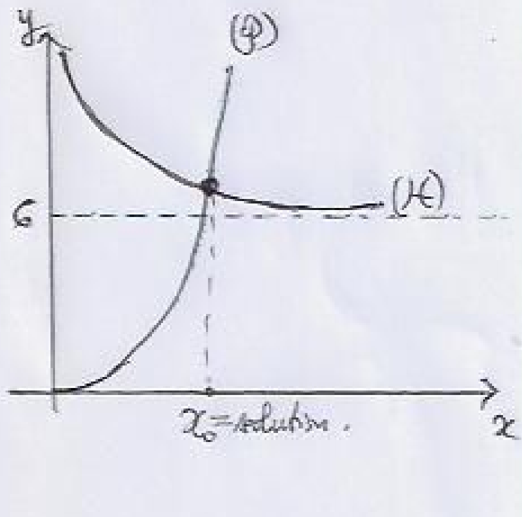
1°/ Résolution géométrique selon la méthode de Omar AL-KHAYYAM.

On peut transformer cette équation en : $x^2 = \frac{6x+4}{x}$.

Il est clair qu'une solution est donnée par l'intersection de la parabole $(P) : y = x^2$ et de l'hyperbole $(H) : y = \frac{6x+4}{x}$.

Construisons ces deux courbes :

(Rappelons, qu'au temps de AL-KHAYYAM, les nombres négatifs "n'existaient" pas). 3pts



2°/ Détermination de x_0 par la méthode de G. Cardan :

On écrit $x = u+v$; d'où $(u+v)^3 = 6(u+v)+4$

$\iff u^3+v^3+3uv(u+v)-6(u+v)=4$

$\iff u^3+v^3+3(uv-2)(u+v)=4$. On doit alors calculer u, v solutions du système $\begin{cases} u^3+v^3=4 \\ uv=2 \end{cases} \iff \begin{cases} u^3+v^3=4 \\ u^3v^3=8 \end{cases}$

Ainsi u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré :

$y^2-4y+8=0$; $\Delta'=4-8=-4=4i^2$ et donc

$\begin{cases} u^3 = 2-2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ v^3 = 2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ v=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$ 4pts

et donc $x_0 = u+v = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}$. On peut pousser le calcul, jusqu'à évaluer $\cos\frac{\pi}{12}$. On a la formule $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.

Prenons $\theta = \frac{\pi}{12}$ alors $2\theta = \frac{\pi}{6}$ et donc $\cos\frac{\pi}{6} = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)-1$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}+1 = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$ (car $\cos\frac{\pi}{12}>0$).

D'où $x_0 = \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$,

càd $\boxed{x_0 = 1+\sqrt{3}}$

Exercice 3 : (09pts) (B) : $x^4+4x+3=0$

Selon la méthode de FERRARI, on pose $x^4 = (x^2+\lambda)^2 - 2\lambda x^2 - \lambda^2$ où λ est un paramètre à déterminer. L'équation devient :

$(x^2+\lambda)^2 - (2\lambda x^2 - 4x - 3 + \lambda^2) = 0$. On doit déterminer λ de telle sorte que le polynôme $2\lambda x^2-4x-3+\lambda^2$ soit un carré, càd son $\Delta = 0$. $\Delta' = 4-2\lambda(\lambda^2-3)=0$. $(\Delta = 4\Delta')$ 4pts

Ainsi λ est solution de l'équation du 3ème degré :

$2\lambda^3-6\lambda-4=0 \iff \boxed{\lambda^3-3\lambda-2=0}$

On remarque que $\boxed{\lambda = -1}$ est une solution évidente. 1pt
(on pourrait chercher toutes les valeurs de λ, mais une seule suffit). Notre équation (B) devient alors :

$$(x^2-1)^2 - (-2x^2-4x-2) = 0$$

$$\iff (x^2-1)^2 + 2(x^2+2x+1) = 0$$

$$\iff (x^2-1)^2 + 2(x+1)^2 = 0$$

$$\iff (x+1)^2\left[(x-1)^2 + 2\right] = 0 \quad \text{4pts}$$

D'où $\begin{cases} (x+1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1} \text{ solution double.} \\ (x-1)^2 = -2 = 2i^2 \Rightarrow \boxed{x = 1 \pm i\sqrt{2}} \end{cases}$

Les solutions sont donc :

$x_1 = x_2 = -1$ et $x_3 = 1 - i\sqrt{2}$, $x_4 = 1 + i\sqrt{2}$.