Université de Tlemcen. le 21/06/2023.

L2 Mathématiques.

Module : Topologie.

Epreuve de rattrapage.

Exercice n° 1

Soit E un espace topologique, $A \subset E$, $B \subset E$

1/ Montrer que si $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ alors $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$

2/ Montrer que si A est ouvert alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

Exercice n° 2

Soit $E = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\ldots\}$. on pose

$$d(n,n) = 0 \quad \text{et} \quad d(m,n) = 10 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \quad m, n \in E$$

1/ Montrer que d est une distance sur E

2/ Montrer que (E, d) est complet.

3/ Soit $f : E \longrightarrow E$
$$n \longmapsto f(n) = n+1$$

a/ Montrer que $d(f(m), f(n)) < d(m,n)$ si $m \neq n$

b/ f est elle contractante ?

Exercice n° 3

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$.

on note $A + B = \{a + b \,/\, a \in A \text{ et } b \in B\}$

1/ Montrer que si A est ouverte alors $(A+B)$ est ouverte.

2/ Montrer que si A et B sont compactes alors $(A+B)$ est compacte

---

Exercice n° 1 : 6pts ; Exercice n° 2 : 8pts ; Exercice n° 3 : 6pts

Bon Courage et Bonnes Vacances

Université de Tlemcen.
L2 Mathématiques
Module : Topologie

Corrigé de l'épreuve de rattrapage.

Exercice n° 1

Soit E un espace topologique, $A \subset E$, $B \subset E$

1/ Montrer que si $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$ alors $\mathring{A} \cup \mathring{B} = \widehat{A \cup B}^{\circ}$

Solution $\mathring{A} \cup \mathring{B} \underset{\supset}{\overset{\subset}{=}} \widehat{A \cup B}^{\circ}$

$\subset$: $\left.\begin{array}{l}\mathring{A} \subset A \\ \mathring{B} \subset B\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \cup B$ (1)

$\left.\begin{array}{l}\mathring{A} \text{ est un ouvert} \\ \mathring{B} \text{ est un ouvert}\end{array}\right\} \xrightarrow{E \text{ esp topo}} \mathring{A} \cup \mathring{B}$ est un ouvert.

(1) $\Longrightarrow \mathring{A} \cup \mathring{B}$ est un ouvert inclu dans $A \cup B$

or $\widehat{A \cup B}^{\circ}$ est le plus grand ouvert inclu dans $A \cup B$, par conséquent $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \widehat{A \cup B}^{\circ}$

$\supset$ $x \in \widehat{A \cup B}^{\circ} \Longrightarrow x \in A \cup B \Longrightarrow x \in A$ ou $x \in B$

Supposons $x \in A \xrightarrow{A \cap \overline{B} = \emptyset} x \notin \overline{B} \Longrightarrow x \in C\overline{B}$

$\xrightarrow{\overline{B} \text{ fermé}} C\overline{B}$ est un ouvert contenant x

$C\overline{B}$ ouvert

$\Longrightarrow C\overline{B}$ voisinage de $x \xrightarrow{A = C\overline{B}} A$ voisinage de x

c.a.d : $\forall x \in A$ A voisinage de $x \Longrightarrow A$ ouvert et $x \in A$

$\Longrightarrow A = \mathring{A}$ et $x \in \mathring{A} \Longrightarrow x \in \mathring{A} \cup \mathring{B}$

Conclusion générale : $\widehat{A \cup B}^{\circ} \subset \mathring{A} \cup \mathring{B}$ (2)

(1)

1 et 2 $\Longrightarrow \mathring{A} \cup \mathring{B} = \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$

2/ Montrer que si A est ouvert alors $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

Solution : Soit $x \in A \cap \overline{B}$ et montrons que $x \in \overline{A \cap B}$

c'est à dire que tout ouvert contenant x rencontre $A \cap B$.

ie : $\forall U$ ouvert $(x \in U)$ $U \cap (A \cap B) \neq \phi$?

$$x \in A \cap \overline{B} \Longrightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow[\substack{U \text{ ouvert} \\ x \in U}]{A \text{ ouvert}} A \cap U \text{ ouvert contenant } x \\ \text{et} \\ x \in \overline{B} \xrightarrow{(3)} A \cap U \cap B \neq \phi \Rightarrow U \cap (A \cap B) \neq \phi \end{cases}$$

$\Longrightarrow x \in \overline{A \cap B}$

Conclusion.

A ouvert $\Longrightarrow A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

Exercice n° 2

Soit $E = \mathbb{N}^*$, on pose $d(n,n) = 0$ et $d(m,n) = 10 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ $m \neq n$

1/ Montrer que d est une distance.

- Tout d'abord $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$

$$(m,n) \longmapsto d(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n \\ 10 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

$\Rightarrow d(m,n) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow D_1$ vérifié.

- $d(m,n) = d(n,m)$ évident.
- $\cdot\ m \neq n \Longrightarrow 10 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \neq 0 \equiv m \neq n \Rightarrow d(m,n) \neq 0$

$\equiv d(m,n) = 0 \Longrightarrow m = n.$

$\cdot\ m = n \Longrightarrow d(m,n) = 0$

$\Rightarrow d(m,n) = 0 \Longleftrightarrow m = n$

$\Rightarrow D_2$ vérifié

$$d(m,p) = 10 + \frac{1}{m} + \frac{1}{p} \leq 10 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + 10 + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$$

$$= d(m,n) + d(n,p).$$

$\Rightarrow \forall m,n,p \in E \quad d(m,p) \leq d(m,n) + d(n,p)$.

$\Rightarrow D_3$ est vérifié

Conclusion : d est une distance sur E

2/ Montrer que (E,d) est complet .

Solution

Soit (x_n) une suite de Cauchy de E

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \begin{matrix} p \geq n_0 \\ q \geq n_0 \end{matrix} \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \begin{matrix} p \geq n_0 \\ q \geq n_0 \end{matrix} \Longrightarrow 10 + \frac{1}{x_p} + \frac{1}{x_q} < \varepsilon$. (1)

Comme (1) est vraie $\forall \varepsilon > 0$, on peut prendre .

$0 < \varepsilon < 10$ on aura pour $p \geq n_0$, $q \geq n_0$.

$$10 + \frac{1}{x_p} + \frac{1}{x_q} < 10 \quad \text{ce qui est impossible}$$

donc on a necessairement $x_p = x_q$ (car $x_p = x_p \Rightarrow d(x_p, x_q) = 0 <$

pour $p, q \geq n_0$, la suite (x_n) est donc stationnaire

et par conséquent (x_n) est convergente , ce qui montre que (E,d) est complet

3/ Soit $f : E \longrightarrow E$
$n \longmapsto f(n) = n+1$

a/ Montrer que $d(f(m), f(n)) < d(m,n)$ si $m \neq n$

Solution

Soient $n, m \in E / n \neq m$.

$$d(f(m), f(n)) = d(m+1, n+1) = 10 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1}$$
$$< 10 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = d(m,n)$$

$\Rightarrow$ $d(f(m), f(n)) < d(m,n)$ pour $m \neq n$.

b/ f est elle contractante ?

Solution

Si f est contractante $\xRightarrow{\text{Th du point fixe}}$ $\exists n \in E / f(n) = n$.

$\Rightarrow \exists n \in E / n+1 = n \Rightarrow 1 = 0$ impossible.

Donc f n'est pas contractante.

Exercice n°(5)

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$,

on note $A + B = \{a+b / a \in A \text{ et } b \in B\}$

1/ Montrer que si A est ouverte alors $(A+B)$ est ouverte.

Solution

Considérons tout d'abord l'application "translation"

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$a \longmapsto f(a) = a + b$ avec $b \in B$

c'est une application ouverte car f^{-1} existe et est continue.

$f(A) = \{f(a), a \in A\} = \{a+b, b \in B\} = A + b$.

A ouverte $\xRightarrow{f \text{ appl. ouverte}}$ $f(A)$ ouverte $\Rightarrow (A+b)$ ouverte

D'autre part $A + B = \bigcup_{b \in B} (A+b)$

c'est donc une union d'ouverts, par conséquent

$(A+B)$ est ouverte.

2/ Montrer que si A et B sont compacts alors $(A+B)$ est compacte.

Solution

Considérons $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x+y.$$

cette application est clairement continue.

$$f(A\times B) = \{f(x,y)\ (x,y)\in A\times B\} = \{x+y\ ;\ x\in A \text{ et } y \in B\}$$
$$= A+B$$

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ compacte} \\ B \text{ compacte} \end{array}\right\} \Rightarrow A\times B \text{ compacte} \xRightarrow{f \text{ continue}} f(A\times B) \text{ compact}$$

$\Rightarrow (A+B)$ compacte