Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2022/2023.

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3.
Module : *Histoire des Mathématiques* - Épreuve Finale.
Lundi 09/01/2023 - Durée : 01h30mn.

Exercice 1 : (05pts) On donne le nombre A écrit en Summérien

Écrire A en base 10 avec les caractères modernes.

Exercice 2 : (05pts) On considère la fraction $F = \dfrac{11}{6}$. Écrire F comme somme de fractions égyptiennes.

Exercice 3 : (05pts) En utilisant la méthode d'Al-Khawarizmi, résoudre l'équation suivante

$$(E) \qquad 2X^2 - X + 3 = X^2 + 5X - 2.$$

Exercice 4 : (05pts)

1. Calculer $(1+\sqrt{2})^3$ et $(1-\sqrt{2})^3$.
2. En utilisant la méthode de Cardan, résoudre l'équation suivante

$$Y^3 - 6Y^2 + 15Y - 28 = 0.$$

Deuxième année de Licence de Mathématiques - Semestre 3 - 2022/2023.

Module : " Histoire des Mathématiques " - Epreuve Finale - Corrigé.

Exercice 1 : (05 pts) $A =$ 𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 𒌋𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹

Rappelons la signification de chaque symbole : 𒌋 $= 10$ et 𒁹 $= 1$.
Remarquons qu'il y a aussi un espace entre les deux groupes de symboles. Ainsi $A = (33)(43)$, mais ceci est écrit en base 60 selon la numération summérienne. La conversion en base 10 donne : $A = 33 \times 60 + 43 = 1980 + 43 = \boxed{2023}$. 2 3

Exercice 2 : (05 pts) $F = \frac{11}{6}$. Rappelons qu'une fraction égyptienne est une fraction d'entiers avec numérateur égal à 1.
La décomposition doit être une somme de fractions égyptiennes distinctes. Aussi la décomposition n'est pas unique. 1

Une première possibilité : $F = \frac{6+5}{6} = 1 + \frac{2+3}{6}$

$$\boxed{F = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$$ 2

Une deuxième possibilité : (selon l'algorithme du cours).

$$F = \frac{6+5}{6} = 1 + \frac{5}{6} \;/\; \frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3\times 4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}.$$

En définitive : 2

$$\boxed{F = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}$$

Exercice 3 : (05 pts) (E) $2x^2 - x + 3 = x^2 + 5x - 2$

Par Al-Jabr : $2x^2 - x + 3 + x + 2 = x^2 + 5x - 2 + x + 2$
الجبر
$\iff 2x^2 + 5 = x^2 + 6x$

Par Al-Mouqabala : $x^2 + \cancel{x^2} + 5 = \cancel{x^2} + 6x$
المقابلة :
$\iff \boxed{x^2 + 5 = 6x}$

L'équation est écrite sous la forme simplifiée d'Al-Khawarizmi, càd $x^2 + q = px$. Ici $p = 6 \Rightarrow \boxed{\frac{p}{2} = 3}$. 1 pt

* Cherchons une solution plus grande que 3 : $x = 3 + y$

d'où $\left[(y+3)^2 + 5 = 6(y+3)\right] \iff y^2 + 6y + 14 = 6y + 18$

$\iff y^2 = 4 \iff y = 2$ (selon Al-Khawarizmi) 2 pts

et donc la solution dans ce cas est $\boxed{x = 3 + 2 = 5}$

* Cherchons une solution plus petite que 3 : $x = 3 - y$ ($y > 0$ et $y < 3$)

d'où $(3-y)^2 + 5 = 6(3-y) \iff y^2 - \cancel{6y} + 14 = 18 - \cancel{6y}$

$\iff y^2 = 4 \iff y = 2$.

La solution dans ce cas est $\boxed{x = 3 - 2 = 1}$ 2 pts

Ainsi cette équation possède deux solutions :

$x = 1$ et $x = 5$.

Exercice 4 : (05 pts)

1°/ * $(1+\sqrt{2})^3 = 1 + 3\times1^2\times\sqrt{2} + 3\times1\times\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 = 7+5\sqrt{2}$ 1pt

* $(1-\sqrt{2})^3 = 1 - 3\times1^2\times\sqrt{2} + 3\times1\times\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^3 = 7-5\sqrt{2}$,

2°/ $$Y^3 - 6Y^2 + 15Y - 28 = 0$$

* Elimination du terme en Y^2 : $Y = X + a$, il vient alors

$(X+a)^3 - 6(X+a)^2 + 15(X+a) - 28 = 0$

$\Leftrightarrow X^3 + \underline{3aX^2} + 3a^2X + a^3 - \underline{6X^2} - 12aX - 6a^2 + 15X + 15a - 28 = 0$

Ainsi si on prend $\boxed{a = 2}$

D'où l'équation : $\boxed{X^3 + 3X - 14 = 0}$ 1pt

Posons $X = u + v$, alors on aura :

$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + 3(u+v) - 14 = 0$

$\Leftrightarrow u^3 + v^3 + 3(u+v)(uv+1) - 14 = 0$

On résoud le système : $\begin{cases} u^3 + v^3 = 14 \\ uv = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = 14 \\ u^3v^3 = -1 \end{cases}$

On forme l'équation du second degré : $Z^2 - 14Z - 1 = 0$

$\Delta' = 49 + 1 = 50$ et les solutions sont $\boxed{Z_1 = 7-5\sqrt{2}}$ et $\boxed{Z_2 = 7+5\sqrt{2}}$

D'où $u = 1-\sqrt{2}$ et $v = 1+\sqrt{2} \Rightarrow X_1 = 2 \Rightarrow \boxed{Y_1 = 4}$ 1pt

Les autres solutions sont : $X_2 = ju + j^2v$ et $X_3 = j^2u + jv$

avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et donc $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$X_2 = (1-\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\sqrt{2}) = -1 - i\sqrt{6}$

$\Rightarrow \boxed{Y_2 = 1 - i\sqrt{6}}$ 1pt

$X_3 = (1-\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1+\sqrt{2})\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{6}$

$\Rightarrow \boxed{Y_3 = 1 + i\sqrt{6}}$ 1pt

3