Université de Tlemcen — le 15/01/2023

L2 Mathématiques

Module : Topologie

Epreuve finale

durée : 1h 45'

Exercice n° 1

Soit (E, d) un espace métrique, U et V deux ouverts denses dans E.

Montrer que $U \cap V$ est un ouvert dense dans E.

$U \cap V$ ouvert (1pt)
$U \cap V$ dense (4pts)

Exercice n° 2

Soit $X =]0, +\infty[$, pour $x, y \in X$, on note

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

1/ Démontrer que d est une distance sur X. (2,5 pts)

2/ Déterminer $B(1,1)$ pour cette distance. (2,5 pts)

3/ La partie $A =]0, 1]$ est elle bornée pour cette distance ? (1pt)

Exercice n° 3

Soit (E, d) un espace métrique, $(x_n)_n$ une suite de E vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall p \in \mathbb{N} \ d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{n}$.

Montrer que $(x_n)_n$ est de Cauchy. (4pts)

Exercice n° 4

Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$ une application continue.

Montrer que si A est un compact de E alors $f(A)$ est un compact de F. (5pts)

Exercice n° 1 : 5pts ; Exercice n° 2 : 6pts ; Exercice n° 3 : 4pts, Exercice n° 4 : 5p

Bon Courage

Université de Tlemcen. le 15/01/2023

L2 Mathématiques.

Module : Topologie

Epreuve finale

durée : $1^h 45'$

Exercice n° 1

Soit (E, d) un espace métrique, U et V deux ouverts denses dans E.

Montrer que $U \cap V$ est un ouvert dense dans E.

Exercice n° 2

Soit $X =]0, +\infty[$, pour $x, y \in X$, on note

$$d(x,y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

1/ Démontrer que d est une distance sur X.

2/ Determiner $B(1,1)$ pour cette distance.

3/ la partie $A =]0,1]$ est elle bornée pour cette distance

Exercice n° 3

Soit (E,d) un espace métrique, $(x_n)_n$ une suite de E verifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall p \in \mathbb{N} \ d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{n}$.

Montrer que $(x_n)_n$ est de Cauchy.

Exercice n° 4

Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$ une application continue.

Montrer que si A est un compact de E alors $f(A)$ est un compact de F.

Exercice n° 1 : 5pts ; Exercice n° 2 : 6pts ; Exercice n° 3 : 4pts, Exercice n° 4 : 5

Bon Courage

Université de Tlemcen le 15/01/2023

L2 Mathématiques

Module : Topologie

Corrigé de l'épreuve finale

Exercice n° 1

Soit (E,d) un espace métrique, U et V deux ouverts denses dans E.

Montrer que $U\cap V$ est un ouvert dense dans E

Solution

- Tout d'abord

$$\left.\begin{array}{l} U \text{ ouvert de } E \\ V \text{ ouvert de } E \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Esp topologique}]{E \text{ sp métrique}} U\cap V \text{ ouvert de } E$$

- Montrons maintenant que si U et V sont denses de E alors $U\cap V$ est dense dans E, il s'agit donc de montrer :

$$\forall x\in E\ \forall r>0\ B(x,r)\cap(U\cap V)\neq\emptyset.$$

$$x\in E, r>0 \xrightarrow[U \text{ dense ds } E]{Hyp} B(x,r)\cap U\neq 0$$

$$\Longrightarrow \exists y\in B(x,r)\cap U \Longrightarrow y\in U$$

$$\xrightarrow[U \text{ ouvert}]{Hyp} \exists \varepsilon>0 \,/\, B(y,\varepsilon)\subset U$$

Posons $\varepsilon = \min(\ell, r - d(x,y))$

on aura $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r) \cap U$, en effet.

$a \in B(y,\varepsilon) \Longrightarrow d(a,y) < \varepsilon$

$$\Longrightarrow \begin{cases} d(a,y) < \ell \Rightarrow a \in B(y,\ell) \Rightarrow a \in U \quad ① \\ \text{et} \\ d(a,y) < r - d(x,y) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a \in U \\ \text{et} \\ d(a,y) + d(y,x) < r . \end{cases}$$

$$\xrightarrow{d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x)} d(a,x) < r \Rightarrow a \in B(x,r) . \quad ②$$

$$\xrightarrow{① \text{ et } ②} a \in B(x,r) \cap U$$

$$\Longrightarrow B(y,\varepsilon) \subset B(x,r) \cap U \quad ③$$

Par hypothèse V est dense dans E, ce qui nous donne $B(y,\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$.

$$\Longrightarrow \exists z \in B(y,\varepsilon) \cap V$$

$$\xrightarrow{③} z \in B(x,r) \cap U \cap V$$

$$\Longrightarrow B(x,r) \cap (U \cap V) \neq \emptyset$$

$$\Longrightarrow U \cap V \text{ est dense dans } E$$

Exercice n° 2

Soit $X =]0,+\infty[$; pour $x, y \in X$, on note

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

1/ Démontrer que d est une distance sur X

Solution

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x,y) \longmapsto d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \geq 0.$$

D_1 : $x, y \in X$

$$d(x,y) = 0 \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \iff x = y$$

$\Longrightarrow D_1$ vérifié.

D_2 : $x, y \in X$

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = d(y,x).$$

$\Longrightarrow D_2$ vérifié.

D_3 : $x, y, z \in X$

$$d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right)\right|$$
$$\leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| + \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right|$$

$\Longrightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

$\Longrightarrow D_3$ vérifié.

Conclusion

D_1, D_2, D_3 vérifiés $\Longrightarrow d$ est une distance sur X

2/ Déterminer $B(1,1)$ pour cette distance.

Solution

$$B(1,1) = \{x \in X / d(x,1) < 1\}$$
$$= \{x > 0 / \left|\frac{1}{x} - 1\right| < 1\}$$
$$= \{x > 0 / -1 < \frac{1}{x} - 1 < 1\}$$
$$= \{x > 0 / 0 < \frac{1}{x} < 2\}$$
$$= \{x > 0 / x > \frac{1}{2}\}.$$

$$\Longrightarrow B(1,1) = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

3/ La partie $A =]0,1]$ est-elle bornée pour cette distance.

Solution

Supposons que A est bornée pour cette distance

$\Longrightarrow A \subset B(x_0, r) \quad x_0 \in E \quad r > 0$. 1

En s'inspirant de la définition de la distance on remarque que pour $n \geq 2$ $\frac{1}{n} \in A$ et

$$d\left(\frac{1}{n}, x_0\right) = \left|n - \frac{1}{x_0}\right| \longrightarrow +\infty$$

$\Longrightarrow \exists \frac{1}{n} \in A / \frac{1}{n} \notin$ à aucune boule,

contradiction avec 1

Par conséquent A n'est pas bornée pour d.

Exercice n° 3

Soit (E,d) un espace métrique, $(x_n)_n$ une suite de E vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall p \in \mathbb{N} \quad d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{n}. \quad \textbf{(H)}$$

Montrer que $(x_n)_n$ est de Cauchy.

Solution.

Soit $\varepsilon > 0$ et considérons $p, q \in \mathbb{N}$ tels $(p<q)$ [même raisonnement pour $p>q$], on peut alors écrire $q = p+d$.

$d(x_p, x_q) = d(x_p, x_{p+d}) \leq \frac{1}{p}$ d'après l'hypothèse

Posons $n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$.

$q > p \geq n_0 \Rightarrow p \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{p} \leq \varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$

Conclusion

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1 \ / \ \begin{matrix} p \geq n_0 \\ q \geq n_0 \end{matrix} \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

$\Rightarrow (x_n)_n$ est de Cauchy.

Exercice n° 4

Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \longrightarrow F$ une application continue.

Montrer que si A est un compact de E alors $f(A)$ est un compact de F.

Solution

Hypothèse : $f : E \to F$ continue, A compact de E

Conclusion : $f(A)$ compact de F.

Considérons $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $f(A)$ par des ouverts de F.

$$\Longrightarrow f(A) \subset \bigcup_{i\in I} U_i \Longrightarrow f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big)$$

$$\xrightarrow[f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)]{A \subset f^{-1}(f(A))} A \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i).$$

- U_i ouvert de F $\xrightarrow[\text{prop.}]{\text{Hyp : } f \text{ cont}}$

Par conséquent $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ est un recouvrement de A par des ouverts de E

$$\xrightarrow[A \text{ compact de } E]{\text{Hyp}} A \subset f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_n}).$$

$$\Longrightarrow f(A) \subset f\big(f^{-1}(U_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{i_n})\big).$$

$$\Longrightarrow f(A) \subset f\big(f^{-1}(U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n})\big).$$

$$\Longrightarrow f(A) \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

$\Longrightarrow f(A)$ est un compact de F.