Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Abou Bekr-Belkaid Tlemcen

Tlemcen 18 Janvier 2023

Examen Final Algèbre 3

Durée : 1 heure 30 minutes

Exercice 1 :

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

1- Montrer que l'espace image $Im(f)$ est stable par f.
2- Soit $x \in Im(f)$. Calculer $f^2(x)$.
3- En supposant que f est inversible, déduire que $f^{-1}(x) = -f(x)$.
4- Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires.
5- Soit $n \geq 2$ et soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Supposant que $g^n = 0$ et que $g^{n-1} \neq 0$. Montrer que $\{x, g(x), g^2(x), \dots, g^{n-1}(x)\}$ est une base de E et écrire la matrice de g dans cette base.

Exercice 2 :

Soit la matrice d'ordre 3 à coefficients réels,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -7 & -9 & 6 \\ -10 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

1- Calculer le polynôme caractéristique de A.
2- Montrer que $\mathbb{R}^3 = Ker(A - 3I_3) \oplus Ker(A + 2I_3)^2$.
3- Montrer que A est trigonalisable mais pas diagonalisable.
4- Montrer que A est semblable à une matrice B de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & s & h \\ 0 & t & k \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5- Calculer A^n pour tous $n \in \mathbb{N}$.

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة أبوبكر بلقايد - تلمسان - كلية العلوم
UNIVERSITÉ ABOU-BAKR BELKAID - TLEMCEN - FACULTÉ DES SCIENCES

Année Universitaire	السنة الدراسية	Nom	اللقب
Examen	الإختبار	Prénom	الإسم
Date	التاريخ	Né (e) le	تاريخ الإزدياد
Signature de l'Etudiant	إمضاء الطالب	N° Carte d'Etudiant	رقم بطاقة الطالب

Observations ملاحظات

Note النقطة /20

Corrigé : E.F Algèbre3 2022-2023

Exo1 : E un $\mathbb{R}$-e.v. ; $\dim E = n < +\infty$

(10pts) $f \in \mathcal{L}(E)$ (endomorphisme de E) / $f^3 + f = 0$.

1pt 1) Mq $\text{Im}(f)$ est stable par f

Soit $x \in \text{Im}(f)$. Mq $f(x) \in \text{Im}(f)$.

$x \in \text{Im}(f) \subseteq E \Rightarrow x \in E \Rightarrow f(x) \in \text{Im}(f)$.

1pt 2) $x \in \text{Im}(f)$. Calculer $f^2(x)$

Soit $x \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists a \in E \,/\, x = f(a)$

Or $f^3 + f = 0 \Rightarrow f^3(a) + f(a) = 0 \quad a \in E$.

$\Rightarrow f^2(f(a)) = -f(a)$

$\Rightarrow f^2(x) = -x$.

3) Mq $f^{-1}(x) = -f(x)$

1pt On suppose f inversible (c.à.d f^{-1} existe)

On a $f^2(x) = -x \Leftrightarrow (f \circ f)(x) = -x = -id(x)$

$\Leftrightarrow f \circ f = -id$

$\Leftrightarrow (-f) \circ f = id$ et $f \circ (-f) = id$

D'où $f^{-1}(x) = -f(x)$, $x \in E$

4) Mq $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

On a $f^3 + f = 0 \Leftrightarrow f \circ (f^2 + id) = 0$

1pt Soit $P(x) = x(x^2+1) = P_1(x) \cdot P_2(x)$ où

$P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2+1$

$P(x)$ est annulateur de f ($P(f) = 0$)

$P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont premiers entre eux (aucune racine commune). Selon le lemme des noyaux;

on a $E = \operatorname{Ker} P_1(f) \oplus \operatorname{Ker} P_2(f)$

soit $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + id)$

Montrons alors que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f^2 + id)$.

Montrons la double inclusion:

1pt • Mq $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f^2 + id)$

Soit $x \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists a \in E \,/\, x = f(a)$

or $f^3 + f = 0 \Rightarrow f^3(a) + f(a) = 0$

$\Rightarrow (f^2 + id)(f(a)) = 0$

$\Rightarrow (f^2 + id)(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \operatorname{Ker}(f^2 + id)$.

1pt • Mq $\operatorname{Ker}(f^2 + id) \subset \operatorname{Im}(f)$

soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + id) \Rightarrow (f^2 + id)(x) = 0$

$\Rightarrow f^2(x) + x = 0$

$\Rightarrow x = -f^2(x)$

$\Rightarrow x = -(f \circ f)(x) \Rightarrow \dots$ $\Rightarrow x = f(-f(x))$

car f lin.

$\Rightarrow x \in \operatorname{Im}(f)$.

5) $g \in \mathcal{L}(E)$; $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$, $n = \dim E$

Mq $\{x, g(x), g^2(x), \dots, g^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

$x \in E^*$, on note $id(x) = x = g^0(x) \neq 0$

2pts Mq $\{x, g(x), g^2(x), \dots, g^{n-1}(x)\}$ est libre.

Soit $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n-1$

$$\sum_0^{n-1} \alpha_i g^i(x) = 0$$

- On compose par g^{n-1} :

$$g^{n-1}\left(\sum_0^{n-1} \alpha_i g^i(x)\right) = g^{n-1}(0) = 0$$

(car $g^{n-1} \in \mathcal{L}(E)$)

$$\Rightarrow \sum_0^{n-1} \alpha_i g^{i+n-1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 g^{n-1}(x) = 0 \quad (g^n, g^{n+1}, \dots g^{2(n-1)} \text{ sont nuls})$$

Or $g^{n-1} \neq 0$ donc $\alpha_0 = 0$.

- On compose par g^{n-2} :

$$g^{n-2}\left(\sum_0^{n-1} \alpha_i g^i(x)\right) = g^{n-2}(0) = 0$$

($g^{n-2} \in \mathcal{L}(E)$)

$$\Rightarrow \sum_0^{n-1} \alpha_i g^{i+n-2}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 g^{n-2}(x) + \alpha_1 g^{n-1}(x) = 0$$

Or $\alpha_0 = 0$ et $g^{n-1}(x) \neq 0$ donc $\alpha_1 = 0$

- On fait la m̂ chose en composant par $g^{n-3}, g^{n-4}, \dots$ etc et on trouve $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots \alpha_{n-1} = 0$

Donc la famille $\{x, g(x), g^2(x), \dots, g^{n-1}(x)\}$ libre

Son cardinal $= n = \dim E$, donc c'est une base de E.

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة أبوبكر بلقايد - تلمسان - كلية العلوم
UNIVERSITÉ ABOU-BAKR BELKAID - TLEMCEN - FACULTE DES SCIENCES

Année Universitaire ______ السنة الدراسية		Nom ______ اللقب	
Examen ______ الإختبار		Prénom ______ الاسم	
Date ______ التاريخ		Né (e) le ______ تاريخ الازدياد	
Signature de l'Etudiant ______ امضاء الطالب		N° Carte d'Etudiant ______ رقم بطاقة الطالب	

Observations ملاحظات

Note العلامة /20

1pt La matrice M de f dans cette base est :

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} g(x) & g^2(x) & \cdots & g^{n-1}(x) & g^n(x) & \\ \end{array}$$

$$M = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} x \\ g(x) \\ g^2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \\ g^{n-1}(x) \end{array}$$

1pt M est la matrice compagnon du polynôme
$P(x) = x^n$.

R: Le poly. carack. de M est $P_M(x) = (-1)^n P(x)$
0 est la seule v.p de M. En effet $g^n = 0$ et donc g est nilpotente et sa seule v.p est $\lambda = 0$.

Exo 2
(10 pts)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -7 & -9 & 6 \\ -10 & -10 & 8 \end{pmatrix}$$

① $P_A(x) = \det(A - xI_3)$

0,5 pt $= -(x-3)(x+2)^2$.

② On applique le lemme des noyaux avec $P(x) = (x-3)(x+2)^2$ (poly. annulateur de f)

les poly $(x-3)$ et $(x+2)^2$ sont premiers

1 pt entre eux (aucune racine commune)

donc $\ker P(f) = \ker(f - 3id) \oplus \ker(f+2id)^2$

et $\ker P(f) = \mathbb{R}^3$ (puisque P est annulateur de A selon Cayley-Hamilton)

0,5pt ③ $P_A(x)$ est scindé donc A est trigonalisable.

1pt A n'est pas diagonalisable. En effet

$$A+2I_3=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -7 & -7 & 6\\ -10 & -10 & 10\end{pmatrix}$$

est de rg 2,

et donc d'après le Th du rang :

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(A+2I_3) + rg(A+2I_3)$$

$$\Rightarrow \dim \underbrace{\ker(A+2I_3)}_{E_{-2}(A)} = 3-2=1 \neq m(-2)=2$$

④ A est semblable à $B=\begin{pmatrix}3 & s & h\\ 0 & t & k\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$

A et B ont m̂ v.p. B est triangulaire supérieure donc $t=-2$.

On a :

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} Aw_1 & Aw_2 & Aw_3 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}3 & s & h\\ 0 & -2 & k\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} & \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix} \end{array} \quad \begin{cases} Aw_1 = 3w_1 \\ Aw_2 = s\,w_1 - 2w_2 \\ Aw_3 = h\,w_1 + k\,w_2 - 2w_3 \end{cases}$$

Comme $\dim E_{-2}(A)=1 \leadsto$ je peux prendre $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}(w_2)$

Donc $s=0$.

On aura dans ce cas $\begin{cases} Aw_1 = 3w_1 & (1) \\ Aw_2 = -2w_2 & (2) \\ Aw_3 = hw_1 + kw_2 - 2w_3 & (3) \end{cases}$

- On résout (1) $Aw_1 = 3w_1$, $w_1 = (x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = 3x \\ -7x - 9y + 6z = 3y \\ -10x - 10y + 8z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ -7x - 12y + 6z = 0 \\ -10x - 10y + 5z = 0 \end{cases} \quad \text{"+"} \; -10x - 10y + 5z = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ -10x - 10y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ -2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

"+" $-5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

D'où $z = 2y$

1pt Donc $w_1 = (0, 1, 2)$

- On résout (2) $Aw_2 = -2w_2$, $w_2 = (x, y, z)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = -2x \\ -7x - 9y + 6z = -2y \\ -10x - 10y + 6z = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 & (*) \\ -7x - 7y + 6z = 0 \\ -10x - 10y + 10z = 0 & (+) \end{cases}$$

(+) $\Leftrightarrow z = x + y$

(*) $\Leftrightarrow y = -x$

D'où $z = 0$

1pt Donc $w_2 = (1, -1, 0)$

w_1 et w_2 sont indépendants.

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة أبوبكر بلقايد - تلمسان - كلية العلوم
UNIVERSITÉ ABOU-BAKR BELKAID - TLEMCEN - FACULTÉ DES SCIENCES

Année Universitaire ______ السنة الدراسية | Nom ______ اللقب
Examen ______ الإمتحان | Prénoms ______ الاسم
Date ______ التاريخ | Né (e) le ______ تاريخ الازدياد
Signature de l'Etudiant ______ امضاء الطالب | N° Carte d'Etudiant ______ رقم بطاقة الطالب

Observations ملاحظات

Note النقطة

/20

On cherche W_3 : (W_3 n'est pas vect. propre, donc h et k ne sont pas tous les deux nuls)

On résout ③ : $AW_3 = hW_1 + kW_2 - 2W_3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - z = k - 2x \\ -7x - 9y + 6z = h - k - 2y \\ -10x - 10y + 8z = 2h - 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = k \\ -7x - 7y + 6z = h - k \\ -10x - 10y + 10z = 2h \end{cases}$$

"+" : $-5x - 5y + 5z = h$; $\times 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - z = k \Leftrightarrow z = 2x + 2y - k \\ -5x - 5y + 5z = h \end{cases}$$

Dc : $-5x - 5y + 10x + 10y - 5k = h$

$\Leftrightarrow 5x + 5y = h + 5k$

Je choisis w_3 pour que (w_1, w_2, w_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Donc je prends $x = 1$ et $y = 0$

D'où $5 = h + 5k$

et $z = 2 - k$

Si je prend $k = 1$ et h vaut donc zéro

Donc $z = 2 - 1 = 1$

1pt D'où $w_3 = (1, 0, 1)$

et on a bien la matrice de passage

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \end{array}, \quad \det P = -1 + 2 = 1 \neq 0$$

1pt D'où $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

⚠ Bien sûre, on peut trouver d'autres B !

5) Calcul de A^n, pour tous $n \in \mathbb{N}$.

On a $B = P^{-1} A P$

$\Leftrightarrow P B P^{-1} = A$

$\Leftrightarrow \boxed{A^n = P B^n P^{-1}}$

Or la décomposition de DUNFORD pour B

1pt nous donne : $B = D + N$ avec $ND = DN$,

et avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ diagonale (donc diagonalisable) 0,5

et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente 0,5

car $N^2 = O_{M_3(\mathbb{R})}$

1pt $B^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k D^{n-k} = D^n + nD^{n-1}N$ 0,5

$\Downarrow$

$= \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & n(-2)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ 0,5

1pt $A^n = P B^n P^{-1}$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & +1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} (1-n)(-2)^n & -n(-2)^n & -n(-2)^{n-1} \\ -3^n + (1+n)(-2)^n & -3^n + (2+n)(-2)^n & 3^n + (2+n)(-2)^n \\ -2\cdot 3^n - (-2)^{n+1} & -2\cdot 3^n - (-2)^{n+1} & 2\cdot 3^n - (-2)^n \end{pmatrix}$

On vérifie $A^0 = I_3$

$A^1 = A$.