Epreuve finale - Corrigé

Dans les questions ci-dessous, vous pouvez supposer que la fonction $f(x)$ est aussi régulière que nécessaire par l'analyse.

Exercice (3.5 points)

1. La formule aux différences finies suivante est utilisée pour calculer approximativement la dérivée d'une fonction $f(x)$ au point x_0 :

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

Estimer l'erreur de la formule en utilisant un développement de Taylor. Puis donner son ordre.

Solution Considérons les formules de Taylor en supposant que la fonction f est de classe $C^3([x_0-h, x_0+h])$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_1), \qquad \xi_1 \in (x_0, x_0+h)$$

et

$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}f'''(\xi_2), \qquad \xi_2 \in (x_0-h, x_0)$$

(0.5 point)

en soustrayant membre à membre, on obtient

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3!}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right)$$

(0.5 point)

Il s'en suit

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}\left(\frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}\right)$$

(0.5 point)

Comme f''' est continue sur $[x_0-h, x_0+h]$ alors le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset [x_0-h, x_0+h]$ tel que

$$f'''(\xi) = \frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}$$

(0.5 point)

alors

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

ce qui donne l'erreur absolue

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right| = \frac{h^2}{6} |f'''(\xi)| \leq \frac{h^2}{6} M_3 \quad \text{avec } M_3 = \max_{x \in [x_0-h, x_0+h]} |f'''(x)|$$

(0.5 point+0.5 point)

La formule de dérivation numérique est d'ordre 2.

(0.5 point)

Exercice 2. **(3.5 points)**
Déterminer les coefficients c_0, c_1, c_2 de sorte à ce que la formule de quadrature suivante soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_0 f\left(-\frac{1}{2}\right) + c_1 f(0) + c_2 f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Trouvez le degré de précision de la formule obtenue.
Solution La formule de quadrature suivante est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 2 si et seulement si elle est exacte pour $x^k, k = 0, 1, 2$.
La formule est exacte pour les constantes donne l'équation

$$\int_{-1}^{1} dx = 2 = c_0 + c_1 + c_2.$$

(0.5 point)

La formule est exacte pour x donne l'équation

$$\int_{-1}^{1} xdx = 0 = -\frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_2.$$

(0.5 point)

La formule est exacte pour x^2 donne l'équation

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} = \frac{1}{4}c_0 + \frac{1}{4}c_2.$$

(0.5 point)

Nous obtenons donc le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{c} c_0 + c_1 + c_2 = 2 \\ c_0 - c_2 = 0 \\ c_0 + c_2 = \dfrac{8}{3} \end{array} \right. ,$$

dont la solution est: $c_0 = c_2 = \frac{4}{3}$et $c_1 = -\frac{2}{3}$.

(0.5 point)

La formule de quadrature cherchée est:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}\left(4f\left(-\frac{1}{2}\right) - 2f\left(0\right) + 4f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Le degré de précision de la formule.
La formule est-elle exacte pour x^3 ?

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0 = \frac{1}{3}\left(4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3\right).$$

(0.5 point)

La formule est-elle exacte pour x^4 ?

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(4\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4\right).$$

(0.5 point)

Le degré de précision de la formule est donc 3.

(0.5 point)

Exercice 3 (2 points)
Compléter le tableau de différences divisées suivant et donner le polynôme d'interpolation dans la base de Newton.

x_i	y_i				
-2	$-\frac{3}{2}$				
		$c = \frac{3}{2}$			
-1	0		$-\frac{1}{2}$		
		$\frac{1}{2}$		$e = 0$	
0	$b = \frac{1}{2}$		$d = -\frac{1}{2}$		$g = \frac{1}{16}$
		$-\frac{1}{2}$		$f = \frac{1}{4}$	
$a = 1$	0		$\frac{1}{4}$		
		0			
2	0				

On a

$$\frac{1}{2} = \frac{b - 0}{0 - (-1)} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\frac{0 - \frac{1}{2}}{a - 0} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

$$c = \frac{0 + \frac{3}{2}}{-1 + 2} = \frac{3}{2}$$

$$d = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$e = \frac{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{3} = 0$$

$$f = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{4}$$

$$g = \frac{\frac{1}{4} - 0}{4} = \frac{1}{16}$$

(1.5 points)

$$p_4(x) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}(x+2) - \frac{1}{2}(x+2)(x+1) + \frac{1}{16}x(x+2)(x+1)(x-1)$$

(0.5 point)

Exercice 4 **(6 points)**
Soit $p_2(x)$ le polynôme de degré ≤ 2 qui interpole la fonction f aux points $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2)$.

a. Ecrire $p_2(x)$ sous la forme de Lagrange.
b. Donner l'expression de l'erreur $f(x) - p_2(x)$ puis majorer l'erreur absolue.
c. A partir du polynôme $p_2(x)$ construire une formule d'approximation de $f'(x_0)$.
d. Donner une expression de l'erreur de la formule trouvée en c.
En déduire l'ordre de la formule.

Solution
a.

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) l_i(x)$$

avec

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-x_0+h)(x-x_0+2h)}{(x_0-x_0-h)(x_0-x_0-2h)} = \frac{1}{2h^2}(x-x_0-h)(x-x_0-2h) \quad (\mathbf{0.5\ point}) \\
l_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_0-2h)}{(x_0+h-x_0)(x_0+h-x_0-2h)} = -\frac{1}{h^2}(x-x_0)(x-x_0-2h) \quad (\mathbf{0.5\ point}) \\
l_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{(x_0+2h-x_0)(x_0+2h-x_0-h)} = \frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_0-h) \quad (\mathbf{0.5\ point})
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= \frac{f(x_0)}{2h^2}(x-x_0-h)(x-x_0-2h) - \frac{f(x_0+h)}{h^2}(x-x_0)(x-x_0-2h) \\
&\quad + \frac{f(x_0+2h)}{2h^2}(x-x_0)(x-x_0-h). \quad (\mathbf{0.5\ point})
\end{aligned}$$

b. En supposant que la fonction f est de classe $C^3([x_0, x_0+2h])$, alors pour tout $x \in (x_0, x_0+2h)$,

$$f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h), \quad \xi(x) \in (x_0, x_0+2h).$$

(**0.5 point**)

D'où l'estimation de l'erreur absolue pour tout $x \in (x_0, x_0+2h)$

$$\begin{aligned} |f(x) - p_2(x)| &\leq \frac{M}{3!}|(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h)| \\ \text{avec } M &= \max_{x\in[x_0,x_0+2h]} |f'''(x)| \quad (\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

c. Dérivons le polynôme $p_2(x)$ on a

$$p_2'(x) = \frac{f(x_0)}{2h^2}(2x-2x_0-3h) - \frac{f(x_0+h)}{h^2}(2x-2x_0-2h) + \frac{f(x_0+2h)}{2h^2}(2x-2x_0-h).$$

(**0.5 point**)

Pour $x = x_0$ on a la formule

$$p_2'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}. \quad (\mathbf{0.5\ point})$$

d. A partir de l'erreur d'interpolation on a

$$\begin{aligned} & f'(x) - p_2'(x) \\ = & \left[\frac{f'''(\xi(x))}{3!}\right]'(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h) \\ & + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}\left[(x-x_0-h)(x-x_0-2h) + (x-x_0)(x-x_0-2h) + (x-x_0)(x-x_0-h)\right] \end{aligned}$$

(**0.5 point**)

pour $x = x_0$

$$f'(x_0) - p_2'(x_0) = \frac{f'''(\xi(x_0))}{3}h^2 \quad (\mathbf{0.5\ point})$$

Ce qui implique

$$|f'(x_0) - p_2'(x_0)| \leq \frac{M}{3}h^2 \quad (\mathbf{0.5\ point})$$

ce qui donne une formule d'ordre 2.

(0.5 point)

Exercice 5 **(5 points)**
Utiliser les méthodes des trapèzes composite et de Simpson composite avec 2 sous intervalles pour approcher I.

$$I = \int_1^2 \sin(\pi x)\,dx$$

Estimer l'erreur dans les deux cas.
Solution
On pose $f(x) = \sin(\pi x)$
La méthode des trapèzes composite s'écrit

$$I \approx Q_{T_2} = \frac{1}{4}\left[f(1) + f(2) + 2f\left(\frac{3}{2}\right)\right] \quad (\mathbf{0.5\ point})$$

$$f(1) = \sin(\pi) = 0,\ f(2) = \sin(2\pi) = 0,\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$$

$$I \approx Q_{T_2} = -\frac{1}{2} \quad (\mathbf{0.5\ point})$$

On sait que

$$\begin{aligned} |I - Q_{T_n}| &\leq \frac{M_2(b-a)}{12}h^2 \quad (\mathbf{0.5\ point}) \\ \text{avec } h &= \frac{b-a}{n} \quad M_2 = \max_{x\in[1,2]}|f''(x)| = \max_{x\in[1,2]}\left|-\pi^2 \sin(\pi x)\right| \leq \pi^2 \quad (\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

alors pour $n = 2, a = 1, b = 2$

$$\begin{aligned} |I - Q_{T_n}| &\leq \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\leq \frac{\pi^2}{48}. \quad (\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

La méthode de Simpson composite s'écrit

$$I \approx Q_{S_2} = \frac{1}{12}\left[f(1) + f(2) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) + 4f\left(\frac{5}{4}\right) + 4f\left(\frac{7}{4}\right)\right] \quad (\mathbf{0.5\ point})$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } f\left(\frac{7}{4}\right) = \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$I \approx Q_{S_2} = -\frac{1}{6}\left(1 + 2\sqrt{2}\right) \quad (\mathbf{0.5\ point})$$

On sait que

$$\begin{aligned} |I - Q_{S_n}| &\leq \frac{M_4(b-a)}{180}h^4 \quad (\mathbf{0.5\ point}) \\ \text{avec } h &= \frac{b-a}{2n} \quad M_4 = \max_{x\in[1,2]}\left|f^{(4)}(x)\right| = \max_{x\in[1,2]}\left|\pi^4 \sin(\pi x)\right| \leq \pi^4 \quad (\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$

alors pour $n = 2, a = 1, b = 2$

$$\begin{aligned} |I - Q_{T_n}| &\leq \frac{\pi^4}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ &\leq \frac{\pi^4}{46\,080}. \quad (\mathbf{0.5\ point}) \end{aligned}$$