Université de Tlemcen. le 01/12/2022.

L2 Mathématiques

Bareme Intermédiaire

Partiel du module de topologie

durée : 1h45'

Exercice n°①

Soit $E=\{a,b,c,d,e\}$ et $\tau=\{\phi, E, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, C\{e\}, \{a,b,e\}\}$

1pt 1/ Montrer que (E,τ) est un espace topologique.

1pt 2/ Soit $A=\{a,c,e\}$, trouver τ_A.

1pt 3/ Trouver un ouvert du sous espace A qui n'est pas un ouvert pour E

1pt 4/ Trouver un fermé du sous espace A qui n'est pas un fermé pour E

1pt 5/ Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, quelle est la topologie induite sur $\mathbb{N}$.

Exercice n°②

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f: X \longrightarrow Y$, une application. Rappelons que f est ouverte si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y et que f est fermée si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

1/ Montrer que [f ouverte] $\Longleftrightarrow$ [$\forall A \subset X \quad f(\mathring{A}) \subset \widehat{f(A)}$] $\xrightarrow{1,5pts}$ $\xleftarrow{1,5pt.}$

2/ Montrer que [f fermée] $\Longleftrightarrow$ [$\forall A \subset X \quad \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$] $\xrightarrow{1,5pts}$ $\xleftarrow{1,5pts}$

Exercice n°③

Montrer que l'application d définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par $d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$

$d(x,y) \geq 0$ 0,5pts

$d(x,y)=d(y,x)$ 0,5pt

$d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$ 0,5pts

$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ 2,5pts

est une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°④

Soit (E,d) un espace métrique, $A\subset E$, $x\in E$.

Montrer que $d(x,A)=0 \Longrightarrow x\in\overline{A}$ 5pts

Exercice n°① : 5pts ; Exercice n°② : 6pts ; Exercice n°③ : 4pts ; Exercice n°④ : 5pts

Bon Courage

Université de Tlemcen. le 01/12/2022.
L2 Mathématiques

Partiel du module de topologie

durée : $1^h45'$

Exercice n°1

Soit $E = \{a,b,c,d,e\}$ et $\tau = \{\phi, E, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, C\{e\}, \{a,b,e\}\}$

1/ Montrer que (E,τ) est un espace topologique.

2/ Soit $A = \{a,c,e\}$, trouver τ_A.

3/ Trouver un ouvert du sous espace A qui n'est pas un ouvert pour E

4/ Trouver un fermé du sous espace A qui n'est pas un fermé pour E

5/ Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, quelle est la topologie induite sur $\mathbb{N}$.

Exercice n°2

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$, une application

Rappelons que f est ouverte si l'image de tout ouvert de X est un ouvert de Y et que f est fermée si l'image de tout fermé de X est un fermé de Y.

1/ Montrer que $[f \text{ ouverte}] \Leftrightarrow [\forall A \subset X \quad f(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}]$

2/ Montrer que $[f \text{ fermée}] \Leftrightarrow [\forall A \subset X \quad \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})]$

Exercice n°3

Montrer que l'application d définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$

est une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°4

Soit (E,d) un espace métrique, $A \subset E$, $x \in E$.

Montrer que $d(x,A) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$

Exercice n°1 : 5pts ; Exercice n°2 : 6pts ; Exercice n°3 : 4pts ; Exercice n°4 : 5pts

Bon Courage

Corrigé du partiel du module de topologie.

Exercice n° 1

Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$

et $\tau = \{\phi, E, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, C\{e\}, \{a,b,e\}\}$

1/ Montrer que (E, τ) est un espace topologique.

Solution

- $\phi \in \tau$, $E \in \tau$ $\Rightarrow$ le premier axiome est vérifié.
- Pour les deux autres axiomes, la vérification est facile, il suffit de calculer la réunion et l'intersection de chaque élément de τ avec les autres.

2/ Soit $A = \{a, c, e\}$, trouver τ_A

Solution

$\tau_A = \{A \cap U \text{ avec } U \in \tau\} = \{\phi; A; \{a\}; \{a,c\}; \{a,e\}\}$

3/ Trouver un ouvert du sous-espace A qui n'est pas un ouvert pour E

Solution : $\{a,e\}$

4/ Trouver un fermé du sous espace A qui n'est pas un fermé pour E.

Tout déterminons les fermés de E et de A.

Les fermés de E sont les complémentaires des ouverts de E, c'est à dire $\{\phi, E, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e\}, \{b,e\}, \{e\}, \{c,d\}\}$

Les fermés de A sont les complémentaires des ouverts de A c'est à dire $\{\phi, A, \{c,e\}, \{e\}, \{c\}\}$.

Par conséquent un fermé de A qui n'est pas un fermé de E est : $\{c\}$ ou $\{c,e\}$.

5/ Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, quelle est la topologie induite sur $\mathbb{N}$

Solution

$\mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N} \cap U$ avec U ouvert de $\mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{N}} = \{\phi, \mathbb{N}\} \cup \{m, m+1, \dots, n\}, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m \leq n$.

Exercice n° 2

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application.

1/ Montrer que [f ouverte] $\Longleftrightarrow$ [$\forall A \subset X \; f(\mathring{A}) \subset \widehat{f(A)}^{\circ}$]

Solution

$\Longrightarrow$

$\mathring{A} \subset A \Rightarrow f(\mathring{A}) \subset f(A)$

$\mathring{A}$ ouvert $\xrightarrow{f \text{ ouverte}}$ $f(\mathring{A})$ ouvert.

$f(\mathring{A})$ est donc un ouvert inclu dans $f(A)$ or $\widehat{f(A)}^{\circ}$ est le plus grand ouvert inclu dans $f(A)$, par conséquent

$$f(\mathring{A}) \subset \widehat{f(A)}^{\circ}$$

$\Leftarrow$

Hypothèse : $\forall A \subset X \quad f(\mathring{A}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(A)}}$

Conclusion : f ouverte

Solution

Soit U un ouvert de $X \Longrightarrow \mathring{U} = U$

$\Longrightarrow f(U) = f(\mathring{U}) \xrightarrow[f(\mathring{U}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(U)}}]{\text{Hyp}} f(U) \subset \overset{\circ}{\widehat{f(U)}}$

$\xrightarrow{\overset{\circ}{\widehat{f(U)}} \subset f(U)} \quad f(U) = \overset{\circ}{\widehat{f(U)}} \Longrightarrow f(U)$ est un ouvert de Y

$\Longrightarrow f$ est ouverte

2/ Montrer que : $[f \text{ fermée}] \Longleftrightarrow [\forall A \subset X \quad \overline{f(A)} \subset f(\bar{A})]$

Solution

$\Longrightarrow$ $A \subset \bar{A} \Longrightarrow f(A) \subset f(\bar{A})$

$\bar{A}$ fermé $\xrightarrow{f \text{ fermée}} f(\bar{A})$ fermé

$f(\bar{A})$ est donc un fermé qui contient $f(A)$

or $\overline{f(A)}$ est le plus petit fermé contenant $f(A)$

Par conséquent $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$

$\Longleftarrow$ Hypothèse : $\forall A \subset X \quad \overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$

Conclusion : f fermée

Solution

Soit F un fermé de $X \Longrightarrow \bar{F} = F$

$\Longrightarrow f(F) = f(\bar{F}) \xrightarrow[\overline{f(F)} \subset f(\bar{F})]{\text{Hyp}} \overline{f(F)} \subset f(F)$

$\Longrightarrow \overline{f(F)} = f(F) \Longrightarrow f$ est fermée

Exercice n° 3

Montrer que l'application d définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par.

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

est une distance sur $\mathbb{R}$

Solution:

1) $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|} \geq 0 \Rightarrow d : \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x,y) \longmapsto d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|} \end{array}$

2) $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|} = \dfrac{|y-x|}{1+|y-x|} = d(y,x) \quad x,y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow d(x,y) = d(y,x) \quad x,y\in\mathbb{R}$

3) pour $x,y \in \mathbb{R}$

$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \Longleftrightarrow |x-y| = 0 \Longleftrightarrow x = y$

$\Rightarrow$ pour $x,y\in\mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

4) Soient x,y et $z \in \mathbb{R}$ on a d'après l'inégalité triangulaire de la valeur absolue.

$$|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y| \quad (1)$$

Remarquons que l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \longmapsto f(t) = \dfrac{t}{1+t} \end{array}$

est croissante car $f'(t) = \dfrac{1+t-t}{(1+t)^2} = \dfrac{1}{(1+t)^2} \geq 0$.

$$(1) \xRightarrow{(2)} \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}$$

$$\Rightarrow \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|+|z-y|} + \frac{|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}$$

$$\leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}$$

$\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Conclusion

1), 2), 3) et 4) $\Longrightarrow$ d est une distance sur $\mathbb{R}$.

4/ Soit (E,d) un espace métrique ; $A \subset E$, $x \in E$

Montrer que $d(x,A)=0 \Rightarrow x \in \overline{A}$

Solution

$$d(x,A)=0 \overset{?}{\Longrightarrow} x \in \overline{A}$$

c'est à dire $d(x,A)=0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0 \; B(x,\varepsilon)\cap A \neq \phi$.

Raisonnons par l'absurde, pour cela supposons et la négation de la conclusion.

Supposons donc $d(x,A)=0$ et $\exists \varepsilon>0 / B(x,\varepsilon)\cap A = \phi$

$\Rightarrow d(x,A)=0$ et $\exists \varepsilon>0 / \forall y \in A \;\; y \notin B(x,\varepsilon)$.

$\Rightarrow d(x,A)=0$ et $\forall y\in A \; d(x,y) \geqslant \varepsilon$.

$\Rightarrow d(x,A)=0$ et ε est un minorant des $d(x,y)$ pour $y\in A$.

Comme $\inf\limits_{y\in A} d(x,y)$ est le plus grand des minorants des $d(x,y)$ pour $y \in A$, cela implique $d(x,A)=0$ et $\inf\limits_{y\in A} d(x,y) \geqslant \varepsilon$

$\xrightarrow{\varepsilon>0} d(x,A)=0$ et $d(x,A) \neq$ contradiction

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \; B(x,\varepsilon)\cap A \neq \phi \Rightarrow x \in \overline{A}$ c.q.f.d.