

2^{ème} année MATH- Semestre 1
Contrôle continu : Analyse 3
Durée : 1h30mn

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1. (6 Pts)

Étudier la nature des séries numériques suivantes

$$1) \sum \sqrt{\frac{2^n}{3^n + n}}, \quad 2) \sum (-1)^n \frac{n}{\ln(2n)}$$

Exercice 2. (7 Pts)

Soit la série de fonction de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x \geq 0.$$

- 1) Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
- 2) Montrer que $S(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est dérivable sur $[0, 1[$.
- 3) En déduire que la fonction S est croissante sur $[0, 1[$.

Exercice 3. (7 Pts)

Soit la série entière suivante

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n(n+2)}.$$

- 1) Déterminer le rayon de convergence R .
- 2) En déduire le domaine de convergence.
- 3) On pose

$$S(x) = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n(n+2)}.$$

Calculer la somme de $S'(x)$ et en déduire la somme de $S(x)$.

- 4) Exprimer la somme de $f(x)$ et en déduire la somme de la série numérique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n(n+2)}$$

2^{ème} année M.I - Semestre 1
 Corrigé du contrôle continu : Analyse 3
 Durée : 1h30mn

Exercice 1. (6 Pts)

1) $\sum \sqrt{\frac{2^n}{3^n + n}}$

On remarque que

$$\frac{2^n}{3^n + n} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n. \quad (0.5\text{Pt})$$

Donc,

$$\sqrt{\frac{2^n}{3^n + n}} \sim \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n. \quad (0.5\text{Pt})$$

Puisque $\sum \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n$ converge (série géométrique de raison $0 < \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$) (1 Pt), alors par le

critère d'équivalence, $\sum \sqrt{\frac{2^n}{3^n + n}}$ converge. (1 Pt)

2) $\sum (-1)^n \frac{n}{\ln(2n)}$

On remarque que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln(2n)} = \pm\infty \neq 0$. (1.5 Pts)

Donc, on n'a pas la condition nécessaire de convergence et ceci implique que la série $\sum (-1)^n \frac{n}{\ln(2n)}$ diverge. (1.5 Pts)

Exercice 2. (7 Pts)

Soit

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad x \geq 0.$$

1) Premièrement, on remarque que pour $x = 1$, on a la série $\sum \frac{1}{2n}$ qui diverge. (0.5 Pt)

Pour $x \neq 1$, sur l'intervalle $[0, 1[$, on a

$$\left| \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)} \right| \leq x^n \quad (1\text{Pt})$$

Puisque $\sum x^n$ est une série géométrique qui converge, alors $\sum \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)}$ converge absolument donc simplement sur $[0, 1[$. (0.5 Pt)

Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, on a

$$\left| \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)} \right| \leq \frac{x^n}{x^{2n}} = \left(\frac{1}{x}\right)^n. \quad (1\text{Pt})$$

Puisque $x > 1$, alors $\frac{1}{x} < 1$ et $\sum \left(\frac{1}{x}\right)^n$ est une série géométrique qui converge. Ainsi, $\sum \frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)}$ converge absolument donc simplement sur $]1, +\infty[$. (0.5 Pt)

2) Montrons que $S(x)$ est dérivable sur $[0, 1[$.

D'après la première question, notre série converge simplement sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. (0.25 Pt)

De plus, le terme général $u_n(x)$ est une fonction dérivable sur $[0, 1[$. Il reste à montrer que $\sum (u_n(x))'$ converge uniformément sur $[0, a[$ avec $a \in]0, 1[$. (0.25 Pt)

Alors,

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{x^n}{n(x^{2n} + 1)} \right)' &= \sum \frac{n^2 x^{n-1} (1 + x^{2n}) - 2n^2 x^n x^{2n-1}}{n^2 (1 + x^{2n})^2} \\ &= \sum \frac{x^{n-1} (1 - x^{2n})}{n^2 (1 + x^{2n})^2}. \quad (1\text{Pt}) \end{aligned}$$

On remarque que

$$\forall x \in [0, a[, \quad \left| \frac{x^{n-1} (1 - x^{2n})}{(x^{2n} + 1)^2} \right| \leq a^{n-1}. \quad (1\text{Pt})$$

Puisque $\sum a^{n-1}$ converge, alors $\sum (u_n(x))'$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1[$. (0.25 Pt)

Ainsi, d'après le théorème du cours sur la dérivabilité des séries de fonctions, $S(x)$ est dérivable sur $[0, 1[$. (0.25 Pt)

3) Il suffit de remarquer que pour $x \in [0, 1[$, on a $1 - x^{2n} > 0$, c'est à dire que la fonction $S'(x) \geq 0$. Ainsi, S est une fonction croissante. (0.5 Pt)

Exercice 3. (7 Pts)

On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n(n+2)}$

1) Le rayon de convergence R est donné par

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+3)} \cdot \frac{n(n+2)}{2^n} \right| = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}. \quad (1\text{Pt})$$

2) Pour $x = 1$, on a la série numérique $\sum \frac{2^n}{n(n+2)}$ qui diverge par le critère de d'Alembert. (0.5 Pt)

Pour $x = -1$, on a la série numérique $\sum \frac{2^n (-1)^n}{n(n+2)}$ qui diverge car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n(n+2)} = +\infty \neq 0$. (0.5 Pt)

Ainsi, le domaine de convergence est

$$D = \left] -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right[. \quad (0.25\text{Pt})$$

3) On a $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+2}}{n(n+2)}$

Pour $x \in D$, on a

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n} = x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n} \quad (0.5\text{Pt}) \\ &= -x \ln(1 - 2x). \quad (1\text{Pt}) \end{aligned}$$

Ainsi, $S(x) = -\int x \ln(1 - 2x) dx$.

En utilisant une intégration par partie, $\int uv' = uv - \int uv'$, on obtient

$$\begin{cases} u = \ln(1 - 2x) & \Rightarrow u' = -\frac{2}{1-2x}, \\ v' = x & \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

C'est à dire,

$$S(x) = - \left[\frac{x^2}{2} \ln(1 - 2x) + \int \frac{x^2}{1 - 2x} dx \right].$$

D'autre part,

$$\frac{x^2}{1 - 2x} = \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1/4}{1 - 2x}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} S(x) &= -\frac{x^2}{2} \ln(1 - 2x) + \int \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{1}{1 - 2x} \right) dx \\ &= -\frac{x^2}{2} \ln(1 - 2x) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln(1 - 2x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sachant que $S(0) = 0$, alors $C = 0$. Ainsi,

$$S(x) = \frac{1}{8}(1 - 4x^2) \ln(1 - 2x) + \frac{1}{4}(x^2 + x). \quad (2\text{Pts})$$

4) Pour $x \neq 0$, on a

$$f(x) = \frac{S(x)}{x^2} = \frac{1}{8x^2}(1 - 4x^2) \ln(1 - 2x) + \frac{1}{4} \left(\frac{x^2 + x}{x^2} \right). \quad (0.5\text{Pt})$$

Remarquons aussi que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x^2} = 0$. **(0.25 Pt)**

Maintenant, pour obtenir la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n(n+2)}$, il suffit de remplacer $x = -\frac{1}{4}$. **(0.25**

Pt)

Ainsi,

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{4}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n(n+2)} \\ &= \frac{3}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4}. \quad (0.25\text{Pt}) \end{aligned}$$