Département de Mathématiques
Faculté des Sciences – UABB – Tlemcen

15/12/2022

Contrôle Continu Algèbre 3 2022-2023

Exercice 1 :

Calculer le déterminant suivant **en utilisant** la linéarité du déterminant par rapport à chaque colonne puis la combinaison linéaire des lignes et/ou des colonnes :

$$D = \begin{vmatrix} nb & b & a & 0 \\ nb & b & 0 & ma \\ ne & 0 & b & mb \\ 0 & e & b & mb \end{vmatrix}$$

Exercice 2 :

Soit m un réel et soit la matrice $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ tel que :

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2m-10 & m-1 & -3m+12 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1-) Déterminer $rg(A_m - 4I_3)$. Conclure

2-) En déduire le polynôme caractéristique $P_{A_m}(x)$.

3-) Pour quelles valeurs de m, A_m est-elle diagonalisable ?

4-) Déterminer le polynôme minimal $M_m(x)$.

5-) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la matrice A_4^n.

Correction du C.C. d'Algèbre 3 du 15/12/2022

Exercice1 : 6.5 pts

Exercice déjà fait en classe : Je n'ai changé que a en b et b en a et j'ai mis e à la place de c. J'ai rajouté n et m pour la linéarité par rapport aux colonnes 1 et 4.

Remarque : Pour ceux qui n'ont pas respecté ce que j'ai demandé à utiliser pour le calcul du déterminant, et ont fait un calcul CORRECT, auront des points en moins.

0.5 pt D est linéaire par rapport aux colonnes 1 et 4 :

1pt $$D = \begin{vmatrix} nb & b & a & 0 \\ nb & b & 0 & ma \\ ne & 0 & b & mb \\ 0 & e & b & mb \end{vmatrix} = nm \begin{vmatrix} b & b & a & 0 \\ b & b & 0 & a \\ e & 0 & b & b \\ 0 & e & b & b \end{vmatrix}$$

1 pt En changeant L2 par L2-L1 et L4 par L4-L3

on obtient :

$$1\ pt \qquad D = nm \begin{vmatrix} b & b & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & a \\ e & 0 & b & b \\ -e & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1 pt En changeant C2 par C2 +C1 et C3 par C3-C4

On obtient :

$$1\ pt \quad D = nm\begin{vmatrix} b & 2b & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a & a \\ e & e & 0 & b \\ -e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la 4ème ligne :

$$0.5\ pt\ D = enm\begin{vmatrix} 2b & a & 0 \\ 0 & -2a & a \\ e & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$0.5\ \ pt \quad D = enma(ae - 4b^2).$$

Exercice 2 (13,5 pts)

$m \in \mathbb{R}$, $A_m \in M_3(\mathbb{R})$

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2m-10 & m-1 & -3m+12 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

① rang $(A_m - 4I_3)$

0,5 $$A_m - 4I_3 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2m-10 & m-5 & -3m+12 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \end{array}$$

0,5 $rg(A_m - 4I_3)$

$\hookrightarrow = dim(Vect(L_1, L_2, L_3))$

(ou) $= dim(Vect(C_1, C_2, C_3))$

0,5 On remarque que L_1 et L_3 sont les mêmes ou encore que $C_1 = 2C_2$

0,5 0,5 Donc $rg(A_m - 4I_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } L_1 \text{ et } L_2 \text{ proportionnels} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$

0,5 On conclut que $rg(A_m - 4I_3) < 3 \Leftrightarrow det(A_m - 4I_3) = 0$

$\Updownarrow$

4 est v.p de A_m

② $P_{A_m}(x)$:

0,5 • On remarque que la somme des éléments de chaque ligne de A_m vaut 1 donc 1 est v.p de A_m

0,5 0,5 • Somme des v.p de $A_m = tr(A_m) = m+5$

$\Rightarrow 4 + 1 + \lambda_3 = m+5 \Rightarrow \lambda_3 = m$ est v.p de A_m

0,5 Donc $P_{A_m}(x) = -(x-1)(x-4)(x-m)$

③ Valeurs de m pour que A_m soit diagonalisable.

• Si $m \neq 1$ et $m \neq 4$ alors A_m
0,5 a 3 valeurs propres distinctes 2 à 2, 1, m et 4.
Donc A_m diagonalisable

1 • Si $m = 4$ alors $P_{A_4}(x) = (x-1)(x-4)^2$
et 4 est v.p de A_4 tel que $m(4) = 2$

On a $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & +3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

et $(A_4 - 4I_3) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d'où : $rg(A_4 - 4I_3) = 1$

En appliquant le Th du rang :

$$\text{rang } \mathbb{R}^3 = \dim\left(\underbrace{Ker(A_4 - 4I_3)}_{E_4(A_4)}\right) + rg(A_4 - 4I_3)$$

$$\Rightarrow \dim\left(Ker(A_4 - 4I_3)\right) = \dim \mathbb{R}^3 - rg(A_4 - 4I_3)$$

$$= 3 - 1 = 2 = m(4)$$

Donc A_4 est diagonalisable

1 • Si $m = 1$ alors $P_{A_1}(x) = (x-1)^2(x-4)$
1 est v.p de A_1 tel que $m(1) = 2$

On a $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\text{et } (A_1 - 4I_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -8 & -4 & 9 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

d'où $rg(A_1 - 4I_3) = 2$ $(C_1 = 2C_2)$

En appliquant le Th du rang :

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\mathrm{Ker}(A_1 - 4I_3)) + rg(A_1 - 4I_3)$$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A_1 - 4I_3))$$

$$= \dim \mathbb{R}^3 - rg(A_1 - 4I_3)$$

$$= 3 - 2 = 1 \neq m(1)$$

Donc A_1 n'est pas diagonalisable

④ Polynôme minimal $M_m(x)$

1 On sait que si une matrice est diagonalisable alors son polynôme minimal possède des racines simples.

Donc : Selon la question ③, on a :

0,5 • $m \neq 1$ et $m \neq 4$; A_m diagonalisable

$\Downarrow$

racines simples $\rightsquigarrow M_m(x) = (x-1)(x-4)(x-m)$

0,5 • $m = 4$; A_4 diagonalisable

$\Downarrow$

racines simples $\rightsquigarrow M_4(x) = (x-1)(x-4)$

0,5 • $m = 1$; A_1 non diagonalisable

$\Downarrow$

racines non simples $\rightsquigarrow M_1(x) = (x-1)^2(x-4)$

(5) Calculer A_4^n, $n \in \mathbb{N}$

On a $M_4(x) = (x-1)(x-4)$, $d^\circ M_4(x) = 2$

0,5+0,5 Pour $n \geq 2$, $x^n = (x-1)(x-4)Q_n(x) + a_n x + b_n$

$$\Rightarrow A_4^n = \underbrace{(A_4 - I_3)(A_4 - 4I_3)}_{=0} Q_n(A) + a_n A_4 + b_n I_3$$

ça vient du poly. annulateur de A_4

0,5 $\Rightarrow A_4^n = a_n A_4 + b_n I_3$

On a aussi : [illegible]

0,5 $\begin{cases} \text{pour } x = 1 ; & 1^n = 1 = a_n + b_n \\ \text{pour } x = 4 ; & 4^n = 4a_n + b_n \end{cases}$

0,5 D'où $\begin{cases} b_n = 1 - a_n \\ 4^n = 3a_n + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_n = \frac{1}{3}(4 - 4^n) \\ a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1) \end{cases}$

0,5 D'où : $A_4^n = \frac{1}{3}(4^n - 1) A_4 + \frac{1}{3}(4 - 4^n) I_3$

0,5 $\begin{cases} \bullet \text{ Si } n = 0 \text{ alors } A_4^0 = I_3 \\ \bullet \text{ Si } n = 1 \text{ alors } A_4^1 = A_4 \end{cases}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_4^n = \frac{1}{3}(4^n - 1) A_4 + \frac{1}{3}(4 - 4^n) I_3$.

FIN