Université de Tlemcen 2022/2023
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Module: Analyse numérique 1

Contrôle continu

Exercice 1 (sur 4 points)
Nous souhaitons calculer la racine $\sqrt{3}$ de $f(x) = x^2 - 3$ en utilisant la méthode de bissection.
(a) Quelle est l'approximation résultante de $\sqrt{3}$, en appliquant deux itérations de bissection, commençant par l'intervalle $[1, 2]$?
(b) Après combien d'itérations peut-on garantir que l'erreur absolue soit inférieure à 0.001?
On donne:

$$\log_2 1000 \approx 9.965, \log_2 100 \approx 6.643, \ \log_2 0.001 \approx -9.965$$

Solution
(a) Notons d'abord que $f(1) = -2$ et $f(x) = 1$, comme la fonction f est continue, le zéro positif de la fonction $f \in [1, 2]$ et la méthode de bissection est appliquable.
Itération 1
On pose $a_1 = 1$ et $b_1 = 2$ alors

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{3}{2}.$$

On a

$$f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$$

Itération 2
alors $a_2 = \frac{3}{2}$ et $b_2 = 2$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{2} + 2}{2} = \frac{7}{4}$$

L'approximation de $\sqrt{3}$ est

$$\sqrt{3} \approx \frac{7}{4}.$$

(b) En utilisant la formule

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Nous cherchons n tel que

$$\frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}.$$

Ce qui implique

$$2^n \geq 10^3$$

et

$$n \geq \log_2 \left(10^3\right) \approx 9.96.$$

Le nombre d'itérations qui garantit que l'erreur absolue soit inférieure à 0.001 est $n = 10$.

Exercice 2 (Sur 6 points)
On considère la fonction $f(x) = x^2 \ln(x)$.
(a) Calculer le polynôme de Taylor $p_3(x)$ approximation de $f(x)$ en $x = 1$.
(b) Donner une borne de l'erreur d'approximation de $f(x)$ par $p_3(x)$ sur l'intervalle $[1, 3]$.
(c) Déterminez une valeur b telle que l'erreur d'approximation de $f(x)$ par $p_3(x)$ sur l'intervalle $[1, b]$ est inférieur à 0.001.
Solution
(a)

$$p_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(x)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x-1)^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x + 2x\ln x \Longrightarrow f'(1) = 1. \\ f''(x) &= 2\ln x + 3 \Longrightarrow f''(1) = 3. \\ f'''(x) &= \frac{2}{x} \Longrightarrow f'''(1) = 2. \end{aligned}$$

$$p_3(x) = (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

(b)

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-1)^4, \xi \text{ entre } x \text{ et } 1.$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2}{x^2}$$

Comme la fonction $f^{(4)}(x)$ est croissante alors

$$\max_{x\in[1,3]} \left|f^{(4)}(x)\right| = \max\left(\left|f^{(4)}(1)\right|, \left|f^{(4)}(3)\right|\right) = \max\left(2, \frac{2}{9}\right) = 2$$

donc pour tout $x \in [1, 3]$,

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{12}(x-1)^4 \leq \frac{1}{12} \times 2^4 = \frac{4}{3}.$$

(c) Maintenant pour tout $x \in [1, b]$,

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{12}(x-1)^4 \leq \frac{1}{12} \times (b-1)^4.$$

Pour assurer que l'erreur d'approximation sur l'intervalle $[1, b]$ est inférieur à 0.001, il suffit de prendre b tel que

$$\frac{1}{12} \times (b-1)^4 \leq 10^{-3}.$$

Ce qui implique

$$(b-1)^4 \leq 12 \times 10^{-3},$$

et donc

$$b \leq 1 + \left(12 \times 10^{-3}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Exercice 3 (sur 5 points)

1. Déterminer toutes les valeurs x^* telles que l'itération du point fixe de $g(x) = \frac{2x^2}{1+3x}$,converge localement vers x^*. Dans chaque cas, déterminer l'ordre exact de convergence.

2. On pose $f(x) = (rx+1)(x^2-1)$, où r est une constante. Pour quelles valeurs de r, la méthode de newton appliquée à la fonction f converge quadratiquement vers $x^* = 1$?

Solution

1. Cherchons d'abord les point fixes de g.

$$\begin{aligned} x &= g(x) \Leftrightarrow x = \frac{2x^2}{1+3x} \Leftrightarrow x(1+3x) - 2x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

Les points fixes de g sont $x^* = 0$ et $x^* = -1$.
La convergence de la méthode du point fixe est déterminée par $|g'(x^*)|$.

$$g'(x) = \frac{4x(1+3x) - 6x^2}{(1+3x)^2} = \frac{4x+6x^2}{(1+3x)^2}.$$

Pour $x^* = 0$
$g'(0) = 0$
Puisque $|g'(0)| < 1$, la méthode du point fixe converge localement vers 0(pour x_0 proche de -1). Pour déterminer l'ordre de convergence, il faut calculer $g''(x)$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(4+12x)(1+3x)^2 - 6(4x+6x^2)(1+3x)}{(1+3x)^4} \\ &= \frac{(4+12x)(1+3x) - 6(4x+6x^2)}{(1+3x)^3} = \frac{4}{(1+3x)^3} \end{aligned}$$

Comme $g''(0) = 4 \neq 0$ alors dans ce cas la convergence est quadratique.
Pour $x^* = -1$
$g'(-1) = \frac{1}{2}$.
Puisque $|g'(-1)| < 1$, la méthode du point fixe converge localement vers -1 (pour x_0 proche de -1) et la convergence est linéaire.

2. La méthode de Newton converge quadratiquement vers $x^* = 1$ si 1 est un zéro simple de f.
Ce qui veut dire que 1 n'est pas un zéro de la fonction f',

$$f'(x) = r\left(x^2-1\right) + 2x(rx+1) = 3rx^2 + 2x - r$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = -1.$$

En conclusion, la méthode de Newton converge quadratiquement vers $x^* = 1$ pour tout $r \neq -1$.

Exercice 4 (Sur 5 points)

Pour calculer la racine x^* de $x^2 - 3x - 1 = 0$ sur $[-1, 1]$, on pose $g(x) = \dfrac{x^2-1}{3}$ pour appliquer la méthode de point fixe $x = g(x)$.

1. Montrer que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, avec $x_0 \in [-1, 1]$, converge vers l'unique point fixe x^* de g dans $[-1, 1]$.
2. Soit $x_0 = 0$, quel est le nombre d'itération de point fixe n nécessaires pour obtenir une précision inférieure à $\epsilon = 10^{-3}$ pour le calcul de x^*?

Solution

1. Démontrons d'abord l'équivalence des deux problèmes.

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\left(x^2 - 1\right) \Leftrightarrow x = g(x).$$

Vérifions les hypothèses du théorème du point fixe.

- g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. $g(1) = g(-1) = 0 \in [-1, 1]$.

  De plus $g'(x) = \frac{2}{3}x$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

  Donc pour tout $x \in [-1, 1]$,

  $$-\frac{1}{3} = \min\left(g(1), g(-1), g(0)\right) \leq g(x) \leq \max\left(g(1), g(-1), g(0)\right) = 0$$

  C'est à dire

  $$g\left([-1, 1]\right) \subset [-1, 1].$$

- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\quad |x| \leq 1, |g'(x)| = \frac{2}{3}|x| \leq \frac{2}{3} < 1.$

  On conclut que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, avec $x_0 \in [-1, 1]$, converge vers l'unique point fixe x^* de g dans $[-1, 1]$.

2. On rappelle la formule de l'erreur d'approximation de x^* par x_n est majorée par

$$|x^* - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$$

avec $k = \frac{2}{3}, x_0 = 0$ et $x_1 = -\frac{1}{3}$.
Alors

$$|x^* - x_n| \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n \left|-\frac{1}{3}\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pour assurer d'avoir une précision de 10^{-3}, il suffit de prendre n tel que:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < 10^{-3}$$

$$n\left(\log_{10} 2 - \log_{10} 3\right) < -3$$

On remarque que comme la fonction logarithme est croissante: $\log_{10} 2 - \log_{10} 3 < 0$ ceci donne

$$n > \frac{3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2}.$$