Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 2
L1 Math

T.D N°3 : Matrices et systèmes linéaires

Exercice 1

On considère la matrice carrée d'ordre 2 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer la matrice $B \in M(2)$ telle que :

$$A = I_2 + 4B$$

où I_2 est la matrice unité d'ordre 2.
(2) Calculer,

$$A^2, B^2, AB, BA, {}^tA, {}^tB, {}^tB.{}^tA, {}^t(A.B), tr(A), tr(B).$$

(3) Calculer

$$-A^2 + 2A - I_2$$

(4) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.
(5) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = I_2 + 4nB$$

Exercice 2

Soit A une matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Trouver les réels a et b tels que :

$$A^2 = aI_3 + bA$$

où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.
(2) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.
(3) Calculer $\det(A)$.
(4) Retrouver l'inverse de A en utilisant la comatrice puis la méthode de Gauss.
(5) Considérons les systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

(i) Ecrire les deux systèmes (S_1) et (S_2) sous les formes matricielles $(DX = b)$.
(ii) Résoudre ces systèmes par trois méthodes $\big($Inversion matricielle - Cramer - Gauss$\big)$.

Exercice 3

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$définie par :

$$f(x,y) \mapsto \left(x-y,\ 2y, x+3y\right)$$

et $B_1 = \{e_1, e_2\}$, $B_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

(1) Déterminer la matrice associée à f relativement aux bases B_1 et B_2, $M_f(B_1, B_2)$.

(2) Considérons les deux autres bases B_1' et B_2' de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement définies par :

$$B_1' = \{e_1', e_2'\} \text{ et } B_2' = \{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'\}$$

où $e_1' = (1,3), e_2' = (2,5), \varepsilon_1' = (0,1,1), \varepsilon_2' = (1,0,1)$ et $\varepsilon_3' = (1,1,0)$.

(i) Déterminer les matrices $P = P_{B_1 \to B_1'}$ et $Q = P_{B_2 \to B_2'}$ les matrices de passage de B_1 à B_1' et de B_2 à B_2' respectivement.

(ii) Soient $u \in \mathbb{R}^2$ de composantes $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique B_1de $\mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^3$ de composantes $V' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base B_2'.

- Déterminer les composantes X' du vecteur u la base B_1' et les composantes V du vecteur v dans la base canonique B_2de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

On note par $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ $(f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3))$, dont la matrice dans B_1 est la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose

$$\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (1,-1,0), \varepsilon_3 = (1,0,1) et B_2 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}.$$

(1) Déterminer l'application f.

(2) Montrer que B_2 constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

(3) Ecrire la matrice B de f dans cette base.

(4) Déterminer la matrice de passage P de la base B_1 à la base B_2.

(3) Retrouver la matrice B de f dans la base B_2 en utilisant la matrice de passage P.