Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 2
L1 Math

T.D N°2 : Applications linéaires

Exercice 1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$définie par :

$$f(x,y) \mapsto \left(x - y,\ -3x + 3y\right)$$

(1) Montrer que f est linéaire.
(2) Déterminer l'image du vecteur $v = (1,1)$ par f.
(3) Existe-il un vecteur $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f(u) = \left(1,\ 0\right)$?
(4) Donner une base de $Ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(5) Montrer par deux méthodes que f n'est ni injective ni surjective.

Exercice 2

On considère l'application $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$T(P) \mapsto (X^2 + 1)P'$$

(1) Montrer que T est linéaire.
(2) Déterminer le noyau de T, $Ker(T)$ et en déduire le rang $rg(T)$.
(3) T est-elle injective? Surjective?.

Exercice 3 (Supplémentaire)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$définie par :

$$f(x,y,z) \mapsto \left(-2x + y + z,\ x - 2y + z, x + y - 2z\right)$$

(1) Montrer que f est linéaire.
(2) Donner une base de $Ker(f)$ et en déduire le rang de f.
(3) Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4 (Supplémentaire)

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$définie par :

$$f(x,y,z) \mapsto \left(x + y,\ z\right)$$

(1) Montrer que f est linéaire.
(2) Déterminer $rg(f)$.
(2) Trouver une base de $Ker(f)$.
(3) f est-elle injective? Surjective?.

INDICATIONS EXERCICES SUPPL2MENTAIRES

Exercice 3

(1)

$$u_1 = (x_1,y_1,z_1), u_2 = (x_2,y_2,z_2)$$
$$u_1 + u_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (X,Y,Z)$$
$$f(u_1+u_2) = f(X,Y,Z) = (-2X+Y+Z, X-2y+Z, X+Y-2Z)$$

$= ([-2x_1+y_1+z_1]+[-2x_2+y_2+z_2],[x_1-2y_1+z_1]+[x_2-2y_2+z_2],[x_1+y_1-2z_1]+[x_2+y_2-2z_2])$
$= f(u_1+u_2) = f(u_1)+f(u_2)$

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= \left(-2\alpha x+\alpha y+\alpha z,\ \alpha x-2\alpha y+\alpha z, \alpha x+\alpha y-2\alpha z\right)\\ &= \alpha\left(-2x+y+z,\ x-2y+z, x+y-2z\right)\end{aligned}$$

(2) $u = (x,y,z) \in Ker(f) \Rightarrow f(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{cases} \Rightarrow x = y, z = y$

$Ker(f) = Vect\{(1,1,1)\}$
$rg(f) = \dim\mathbb{R}^3 - \dim(Ker(f)) = 2$
(3) $\mathrm{Im}(f) = Vect\{(-2,1,1),(1,-2,1),(1,1,-2)\} = Vect\{(1,-2,1),(1,1,-2)\}$
car $(-2,1,1) = -(1,-2,1)-(1,1,-2)$

Exercice 4

(2) $f(x,y,z) = x(1,0)+y(1,0)+z(0,1) = (x+y)(1,0)+z(0,1)$
$rg(f) = 2$
(2) $\dim(Ker(f)) = \dim\mathbb{R}^3 - rg(f) = 1$
(3) $u = (x,y,z) \in Ker(f) \Rightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
$Ker(f) = Vect\{(1,-1,0)\}$
$Ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ non inj
$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ surj