Université Abou Bekr Belkaid - Tlemcen
Faculté des sciences
Département de mathématiques

Année universitaire: 2022 - 2023
Module: Algèbre 2
L1 Math

T.D N°1 : Structures Algébriques et espaces vectoriels

Exercice 1

On muni l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ des deux L.C.I $*$ et T définies par :

$$\forall x,y \in \mathbb{R},\ x * y = x + y - 1,\ \ xTy = x + y - xy$$

(1) Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.
(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x * 2 = 0 \text{ et } x * x * 3 = 2.$$

(3) Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $*$.
(4) Montrer que $(\mathbb{R}, *, T)$ est un corps commutatif.
(5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$xT2 = 1 \text{ et } xTxT(-1) = -1.$$

Exercice 2

(1) Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau unitaire non commutatif d'éléments neutres 0 et 1 pour l'addition $(+)$ et la multiplication $(\cdot)$ respectivement.
On pose $B = \left\{x \in A\backslash\{0\}\ :\ x \text{ admet un inverse } x^{-1} \text{ dans } A\right\}$, l'ensembles des éléments inversibles de l'anneau A.
- Déterminer une condition sur l'ensemble B pour que $(A, +, \cdot)$ soit un corps.
(2) On suppose que $(A, +, \cdot)$ est un corps nom commutatif.
Pour chaque $a \in A$, on définit l'application

$$f_a : A \longrightarrow A \text{ par } : \forall x \in A,\ f_a(x) = a \cdot x \cdot a^{-1}$$

(i) Calculer $f_a(1)$.
(ii) Montrer que f_a est un automorphisme de corps.

Exercice 3

Parmi les ensembles F dire lesquels sont des $s.e.v$ de E dans chaque cas :
(1) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 0\right\}$. (2) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x + 3y = 0\right\}$
(3) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4\right\}$, (4) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \left\{P \in \mathbb{R}[X];\ \deg(P) = 4\right\}$
(5) $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \mathbb{R}_4[X] = \left\{P \in \mathbb{R}[X];\ \deg(P) \leq 4\right\}$
(6) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \left\{f :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{application}\right\}$, $F = \left\{f \in E;\ f \text{ est paire}\right\}$
(7) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \left\{f \in E;\ f(1) = 0\right\}$, (8) $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $F = \left\{f \in E;\ f(0) = 1\right\}$.

Exercice 4

Soient $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = y = z\right\}$ et $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 0\right\}$
(1) Montrer que U et W sont des $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$
(2) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

Exercice 5

Soient $u = (1,2,3)$ et $v = (2,3,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
(1) Ecrire les vecteurs $w_1 = (1,3,8)$ et $w_2(2,4,5)$ comme combinaison linéaires de u et v.
(2) Déterminer le réel k pour que le vecteur $w = (1,k,-2)$ soit combinaison linéaire de u et v.
(3) Déterminer des conditions sur les réels a, b et c pour que le vecteur $W = (a,b,c)$ puisse s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs u et v.

Exercice 6 ($SUPP$)

Soient

$$U_1 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a = c\right\}, U_2 = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a+b+c = 0\right\} \text{ et } U_3 = \left\{(0,0,c) \,:\, c \in \mathbb{R}\right\}$$

(1) ($SUPP$) Montrer que : $U_i,\ i = 1,3$ sont des $s.e.v.$de $\mathbb{R}^3$.
(2) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2, \mathbb{R}^3 = U_2 + U_3, \mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$.
(3) Déterminer $\dim U_1,\ \dim U_2,\ \dim U_3$.
(4) Dans quel cas la somme est directe.

Exercice 7

(1) Montrer que : $S = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(2) Trouver les composantes de $v = (a,a,c)$ et $w = (2,3,4)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et sur la base S.
(3) Déterminer les composantes des vecteurs de la base canonique dans la base S.

Exercice 8

(1) Montrer que : $F = \left\{(t-1)^3,(t-1)^2,(t-1),1\right\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
(2) Trouver les composantes du polynôme $P(t) = 3t^3 - 4t^2 + 2t - 5$ dans cette base.

Exercice 9

Soient $A = \{(x+y,y-3x,x) \,:\, x,y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = -2x = -2z\}$.
(1) ($SUPP$) Vérifier que A et B sont deux $s.e.v$ de $\mathbb{R}^3$.
(2) Déterminer $\dim A$ et $\dim B$.
(3) Montrer que $A \oplus B = \mathbb{R}^3$.

Exercice 10 ($SUPP$)

Soit $\mathbb{R}_1[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 et $B = \{1,x\}$ sa base canonique.
(1) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \,:\, a + bx = \dfrac{a-b}{2}(1-x) + \dfrac{a+b}{2}(1+x)$
(2) Déterminer les réels α et β tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha(1-x) + \beta(1+x) = 0$.
(3) En déduire que : $C = \{1-x, 1+x\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
(4) Déterminer les composantes du vecteur $P(x) = 2x + 3$, ainsi que les vecteurs de la base canonique B dans la base C.

Exercice 11 ($SUPP$)

Soit $E = \mathbb{R}_1[X],\ E_1 = \left\{P \in E;\ P(-X) = P(X)\right\}$ et $E_2 = \left\{P \in E;\ P(-X) = -P(X)\right\}$.
(1) Montrer que E_1 et E_2 sont des $s.e.v$ de E.
(2) Montrer par deux méthodes que $E = E_1 \oplus E_2$.